

Modélisation géotechnique du site de Umm Amr

Par MICHEL Clotaire
Elève-ingénieur civil des Mines 2A

Destinataire du rapport : René Elter
Tuteur Ecole Biblique : Jean-Baptiste Humbert
Tuteur Ecole des Mines : Thierry Verdel

Rapport du stage effectué du 23 Juin au 26 Septembre 2003
dans le cadre d'une mission Archéologique Franco-Palestinienne

Table des matières

Introduction.....	3
1^{ère} partie : Détermination de la charge pouvant être supportée par la fondation.....	4
I. Calcul analytique.....	4
II. Calcul numérique.....	5
1. La méthode des éléments distincts.....	5
2. Modèle numérique simple.....	6
3. Prise en compte de la maçonnerie.....	8
4. Conclusion.....	10
2^{ème} partie : Détermination de la charge devant être supportée par la fondation.....	11
I. Modélisation du stylobate Sud.....	11
1. Modèle n°1 : la représentation stricte de la coupe.....	11
2. Modèle n°2 : une extension latérale à droite.....	17
3. Modèle n°3 : déformations planes et comportement élasto-plastique.....	19
4. Calculs analytiques et validation des modèles.....	24
5. Confrontation avec la charge limite.....	26
II. Modélisation du mur Ouest de l'église (façade).....	28
1. Un premier modèle.....	28
2. Hypothèse 1 : La résistance du mortier a été sous-estimée.....	31
3. Hypothèse 2 : la restitution architecturale n'est pas exacte.....	33
4. Comparaison des 3 modèles.....	35
III. Conclusion.....	37
3^{ème} partie : Détermination de la stabilité du bâtiment dans son environnement dunaire.....	38
I. Première situation historique supposée.....	38
1. Le modèle.....	38
2. Les résultats.....	39
II. Après la construction de la crypte.....	42
1. Le modèle.....	42
2. Les résultats.....	43
III. Conclusion.....	44
Conclusion générale.....	44
Bibliographie.....	45
Annexes.....	46
Annexe 1 : Coupes architecturales du bâtiment.....	47
Annexe 2 : Essai de laboratoire au LAEGO.....	48

Introduction

Le site de Umm Amr, à Nousseirat près de Gaza (Palestine), a abrité un ensemble monastique byzantin dès le IV^{ème} siècle. Il s'est développé au cours du temps et a été doté notamment de quatre églises qui se sont superposées dans les âges jusqu'au VIII^{ème} siècle, époque à laquelle il a été abandonné. Les traces de ces bâtiments, pillés par les habitants, ont été redécouvertes par l'armée israélienne dans les années 70 et plus ardemment fouillées par l'Autorité Palestinienne à partir de 1998 à la suite des accords d'Oslo de 1993. Située sur une dune, la dernière église attire particulièrement l'attention par ses dimensions et notamment celles de sa crypte tant le sol sur laquelle elle a été fondée paraît instable. En outre, aucune fondation de type particulier n'a été mise en œuvre par les bâtisseurs pour la stabiliser. Il m'a donc été demandé de déterminer la stabilité que pouvait avoir ce bâtiment à l'aide de modélisations numériques et analytiques dans le but d'une part d'aider à comprendre ce qui a pu être à l'origine de son effondrement et d'autre part de fournir des éléments pour une éventuelle reconstruction de mise en valeur du site.

Les moyens mis à ma disposition ne permettant que de faire des calculs en 2D, tous les modèles sont tirés de coupes fournies par les archéologues représentant le bâtiment tel qu'il devait être. Deux coupes n'ont été fournies : celle du mur stylobate Sud, l'un des murs porteurs les plus importants et la façade Ouest. La richesse géométrique des modèles est donc réduite mais ce sont d'autres inconnues plus importantes encore qui limitent la validité des résultats. Quand s'était possible, les modèles numériques ont été accompagnés d'un modèle analytique permettant sa validation.

L'étude est séparée en trois parties. Compte tenu du fait qu'elles surprennent les archéologues, les fondations et la capacité portante du sol nous intéresseront dans la première. Son objectif est de déterminer une charge limite acceptée par la semelle de fondation. La seconde partie doit donner la valeur de la charge maximale s'appliquant sur la semelle, déduite des reconstitutions archéologiques. Le but est de déterminer si le bâtiment était stable en poinçonnement. Dans la troisième partie, nous tenterons de réintroduire le bâtiment dans la pente de la dune. L'objectif est de vérifier la stabilité en glissement de l'ensemble.

Les explications du phasage des calculs sont souvent incomplètes et imagées pour faciliter la lecture, pour plus de précision il faut se reporter au code brut. Le détail des codes de la modélisation numérique est disponible à part dans le rapport intitulé « Lignes de code utilisées dans la modélisation UDEC » (environ 50 pages).



Photo 1 : Vue générale du site orientée Sud centrée sur l'église. On peut voir la crypte à gauche.

1^{ère} partie :

Détermination de la charge pouvant être supportée par la fondation

Pour tester la capacité portante du sol, il a été décidé de modéliser la « fondation » mise à jour par les archéologues, en particulier sous les stylobates de la dernière église, en coupe transverse de manière à tester les charges qu'elle pouvait supporter. Cette charge doit pouvoir donner une idée de la hauteur du bâtiment. Les formules analytiques sont celles employées classiquement en mécanique des sols pour une fondation superficielle, la modélisation numérique a été réalisée avec UDEC.



Photo 2 : La fondation du mur stylobate.
La coupe modélisée est transverse de celle encadrée en rouge.

I. Calcul analytique¹

Le calcul et la conception des ouvrages actuels sont fondés sur une démarche réglementaire semi-probabiliste regroupée dans l'EUROCODE. Ce texte permet aux concepteurs par exemple en géotechnique de déterminer la contrainte ultime de résistance du sol dans lequel on construit une fondation puis la contrainte limite de service, contrainte qu'il ne faut pas dépasser pour que le bâtiment apposé sur la fondation puisse être utilisé normalement.

Le calcul analytique par les formules de Caquot et Kerisel vise à donner la contrainte ultime q_u qui représente la capacité portante du sol. Il s'agit de la somme de 3 termes : le terme de profondeur, le terme de surface et le terme de cohésion. Nous avons considéré que le sable n'était pas cohérent donc ce dernier terme est nul. Les paramètres dont dépendent ces termes sont le poids volumique du sol γ (pour nous 15 kN/m^3), la profondeur de la fondation D (pour nous 1.6 m), la largeur de la fondation B et deux coefficients N_q et N_γ qui sont reliés à l'angle de frottement ϕ du sol (pour nous 35°). La largeur de notre fondation n'étant pas constante, nous regarderons la valeur pour des largeurs de 0.85 m et 1.2 m afin d'obtenir un encadrement

¹ MERRIEN, AMITRANO, PIGUET, « Eléments de géotechnique », Ecole des Mines de Nancy, 2002/2003

de la réalité. Les tables donnent respectivement $N_q=33.3$ et $N_\gamma=48$. Pour représenter une charge ponctuelle due aux colonnes qui reposent sur la fondation, l'auteur conseille de choisir le modèle de la semelle carrée, pour lequel le terme de profondeur est amputé de 20%. La formule s'écrit alors $q_u = 0.8 \times \frac{\gamma B}{2} N_\gamma + \gamma D N_q$ ce qui donne une contrainte ultime comprise entre 1044 et 1144 kPa ($1044 \leq q_u \leq 1144$).

Pour déterminer l'état limite de service, on combine les différentes actions que doit supporter la fondation, des actions permanentes aux actions jugées rares. Nous nous contenterons du poids des bâtiments pour ce calcul qui sera donc la charge de référence dont nous allons déterminer le maximum ici. On doit en effet avoir : $q_{ref} \leq \frac{1}{3}(q_u - q_0) + q_0$ pour une charge verticale centrée sur un terrain homogène isotrope et horizontal, avec q_0 la contrainte verticale au niveau de la base de la fondation en faisant abstraction de la fondation. Ici, on a donc : $q_0 = 1700 \times 9.81 \times 1.6 = 27 \text{ kPa}$ d'où $365 \leq q_{ref \max} \leq 400 \text{ kPa}$. Le modèle analytique affirme donc que la charge maximale admise par la fondation pour que le bâtiment reste utilisable est comprise entre 365 et 400 kPa.

II. Calcul numérique

Le code de calcul employé (UDEEC) pour cette modélisation est un code en 2 dimensions utilisant la méthode des éléments distincts dont on fera tout d'abord une présentation. Ensuite on se penchera sur le modèle proprement dit. La géométrie retenue représente la moitié droite de la fondation compte tenu de sa symétrie. Il fait dans sa totalité 16 m de haut sur 6 de large.

1. La méthode des éléments distincts

La méthode des éléments distincts est une méthode de calcul numérique discontinue c'est-à-dire qu'elle est en mesure de représenter les interfaces entre les différentes parties discrètes d'un système. Contrairement aux méthodes continues (éléments finis, différences finies...) elle peut donc représenter des grandes rotations et des grands déplacements c'est pourquoi elle est bien adaptée à l'étude des massifs rocheux fracturés par exemple. La méthode des éléments distincts résout directement les équations du mouvement avec un algorithme de différences finies explicite. Les blocs peuvent être rigides ou déformable (nous choisirons toujours des blocs déformables donc pourvus d'un maillage) et les joints sont toujours déformables.

Les calculs réalisés par UDEEC sont alternativement l'application d'une loi de force/mouvement à chaque interface et de la loi fondamentale de la dynamique entre chaque bloc. Dans la première phase, on calcule la force appliquée aux interfaces à partir des déplacements (connus) et dans la deuxième, on calcule le mouvement en chaque point du maillage à partir du champ de force qui est connu. On alterne (cycles) ces deux calculs jusqu'à une position d'équilibre déterminée par l'utilisateur (plus de déplacement significatifs, forces équilibrées...).

2. Modèle numérique simple

Dans un premier temps, la fondation est vue comme un monolithe de kurkar (grès marin local) et l'encaissant comme entièrement composé du sable de surface. Les blocs sont choisis déformables, c'est à dire qu'on leur affectera un maillage.

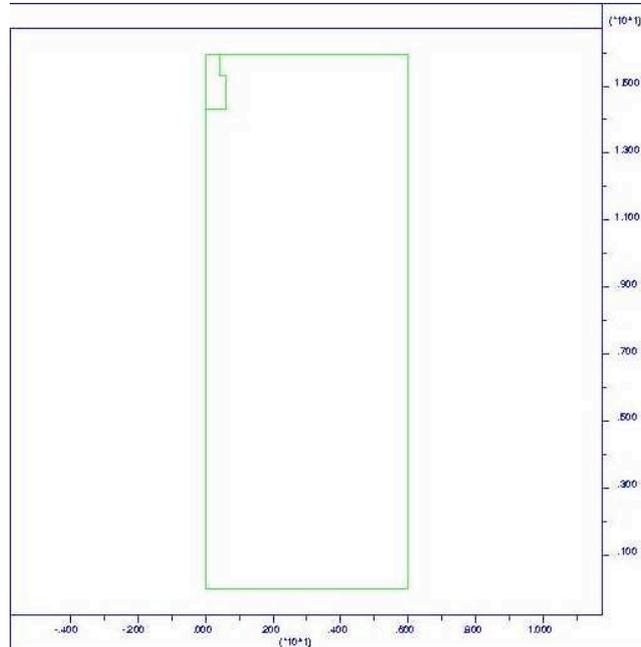


Figure 1 : Le premier modèle

Matériau	Densité	K (MPa)	G (MPa)	Φ (°)	C (kPa)
Sable	1.5 ²	17	8	35 ¹	7
Kurkar ³	1.7	5600	2600		

Tableau 1 : Les propriétés des matériaux

(Rappel : K= module de déformation volumique et G= module de cisaillement.)

La cohésion est ajoutée artificiellement pour éviter les ruptures en traction à la surface du sable et calculée dans cette optique.

Les propriétés des joints sont choisies artificiellement : Kn est choisi du même ordre de grandeur que le module d'Young du matériau le plus rigide, Ks comme le module de cisaillement du matériau le moins résistant.

Les conditions aux limites sont dans un premier temps constituées par un blocage inférieur et latéral. Le chargement d'effectue par la gravité dans un premier temps.

Phasage du calcul :

Le calcul se déroule selon les phases suivantes

- Tout le modèle est en sable, les joints sont très cohérents et résistants en traction de manière à effectuer un tassement « géologique ».
- Dans une deuxième phase, la fondation prend ses propriétés finales mais tous les matériaux restent en comportement élastique pour éviter qu'une oscillation ne dépasse la limite de plasticité artificiellement pendant le tassement.

² Essai MECHLING juin 2003

³ Essai LAEGO mai 2003, c.f. annexe 2

- Ensuite, les joints en viennent à leurs propriétés finales (cohésion et résistance à la traction nulles) et le sable passe en modèle élasto-plastique. La construction de la fondation est donc terminée à ce stade.
- Il ne reste plus qu'à charger cette fondation à l'aide des conditions aux limites en contraintes.

La méthode de chargement utilisée simule la construction du bâtiment car elle s'effectue par paliers de 25 kPa entre lesquels la structure se stabilise. Il semble que cette méthode n'affecte pas réellement les résultats. La condition de chargement utilisée est en contrainte et non en force simplement pour éviter une conversion.

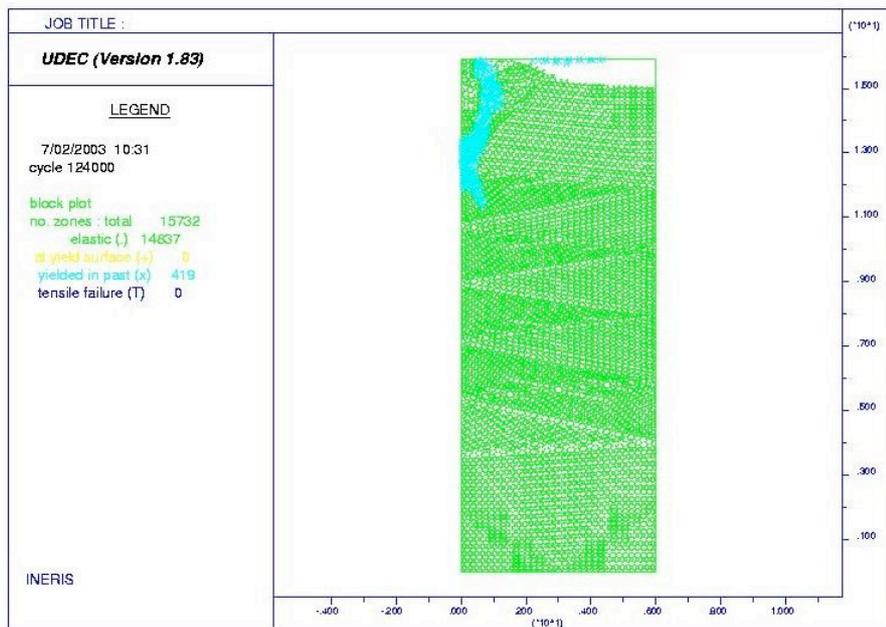


Figure 2 : Points plastiques pour un chargement de 280 kPa

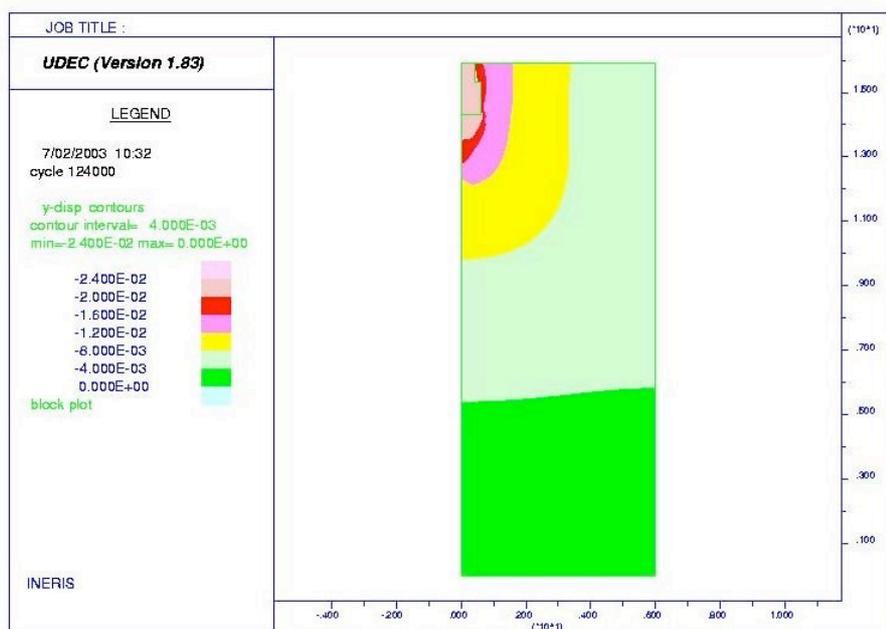


Figure 3 : Tassement pour un chargement de 280 kPa

Pour comparer les résultats de cette modélisation au calcul analytique, il faut se pencher sur la définition de la charge limite de plasticité. Elle est déterminée à partir de la courbe de tassement (figure 5) de la fondation en fonction de la charge appliquée. La réalisation de cette courbe à l'aide du chargement à différentes valeurs donne une charge ultime du modèle numérique de l'ordre de 300 kPa.

Si cette grandeur ne n'est pas tout à fait équivalente à la charge limite de service déterminée au paragraphe 1 compte tenu du fait que l'une vient d'un calcul semi-probabiliste et l'autre d'un calcul déterministe ou d'une mesure mais le fait qu'elles soient du même ordre de grandeur n'est pas un hasard et est plutôt rassurant.

Ce premier modèle conduit donc à penser que la semelle employée pour cet édifice permet de soutenir les efforts correspondant à un mur plein en kurkar de 17 m de haut.

Par ailleurs, il faut s'assurer que la « fondation » elle-même résiste à cette charge compte tenu du fait qu'elle n'est pas constituée d'un seul bloc mais de blocs maçonnés et de remblais en son centre. Il faut donc utiliser un modèle qui prend en compte cela et qui permettra, en outre, d'affiner cette valeur.

3. Prise en compte de la maçonnerie

On affine donc le premier modèle en séparant la semelle en 2 parties distinctes et en réalisant un calcul en affectant aux matériaux des propriétés élasto-plastique. La partie supérieure, composée de blocs maçonnés assez soignés sera représentée comme telle. La partie inférieure composée de blocs et de mortier coulé de manière peu soignée sera représentée comme un milieu équivalent aux caractéristiques mécaniques plus faibles que la roche utilisée. ($E' = E/10$) Seule est à disposition la résistance en compression du kurkar (3.3 MPa), on choisira sa résistance en traction comme le dixième de celle-ci, sa cohésion comme le double de la résistance en traction et on en déduit son angle de frottement à l'aide des cercles de Mohr.

Matériau	Densité	K (MPa)	G (MPa)	Φ (°)	C (kPa)	Rt (kPa)
Sable	1.5	17	8	35	7	
Kurkar ⁴	1.7	5600	2600	50	600	300
Milieu éq.	1.7	560	260	50	45	30

Tableau 2 : Les propriétés des matériaux

Les caractéristiques des joints entre les blocs maçonnés sont prises différentes des autres joints, selon la méthode exposée plus haut. L'angle de frottement est pris plus grand (égal à 45°) et il est ajouté une cohésion et une résistance à la traction pour simuler la présence de mortier.

Joint	Kn (MPa)	Ks (MPa)	Φ (°)	C (kPa)	Rt (kPa)
Entre blocs	6700	2600	45	45	45
autres	6700	8	35	0	0

Tableau 3 : Les propriétés des joints

⁴ Essai LAEGO mai 2003

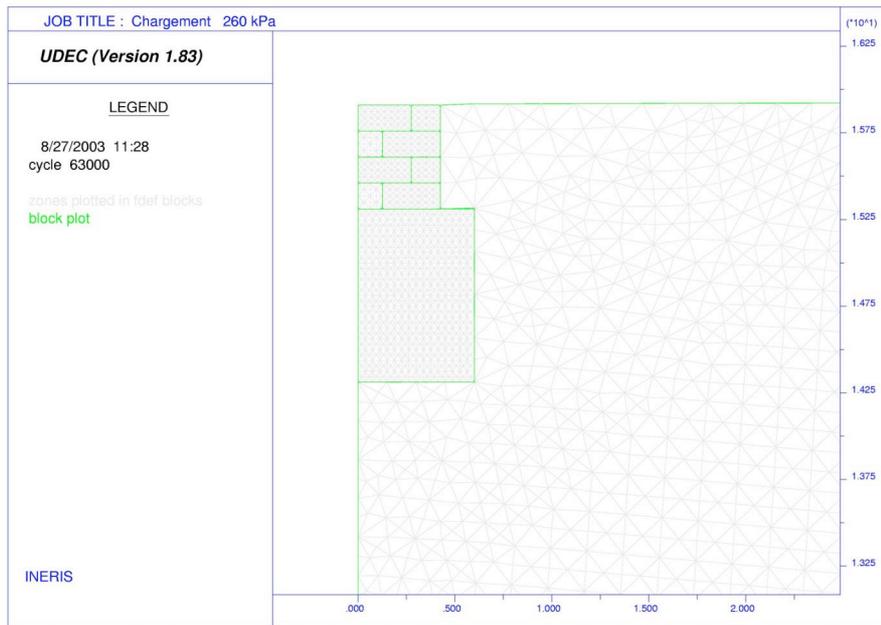


Figure 4 : Deuxième modèle et son maillage

Le phasage du calcul, les conditions aux limites et le chargement restent inchangés par rapport au premier modèle.

On peut donc de la même manière déterminer la charge limite q_l et la comparer à la valeur précédente. L'ordre de grandeur reste le même mais on constate qu'au-delà de la zone linéaire de fonctionnement normal de la fondation, le premier modèle sous estimait l'enfoncement de la structure (plasticité dans la semelle). On peut s'accorder pour conserver de cette modélisation une valeur de 260 kPa pour cette charge limite. Cependant, il faut bien noter que la définition de cette charge limite est toute théorique et si elle devait être employée lors de la construction d'un bâtiment, elle serait diminuée d'un coefficient dit « de sécurité ». Les ingénieurs qui ont conçu ce monastère ignoraient bien sûr l'existence de cette grandeur et cette valeur de 260 kPa très bien pu être dépassée sans que la structure n'en fût trop affectée. Il s'agit pourtant de la seule grandeur à notre disposition, il faut donc s'en contenter.

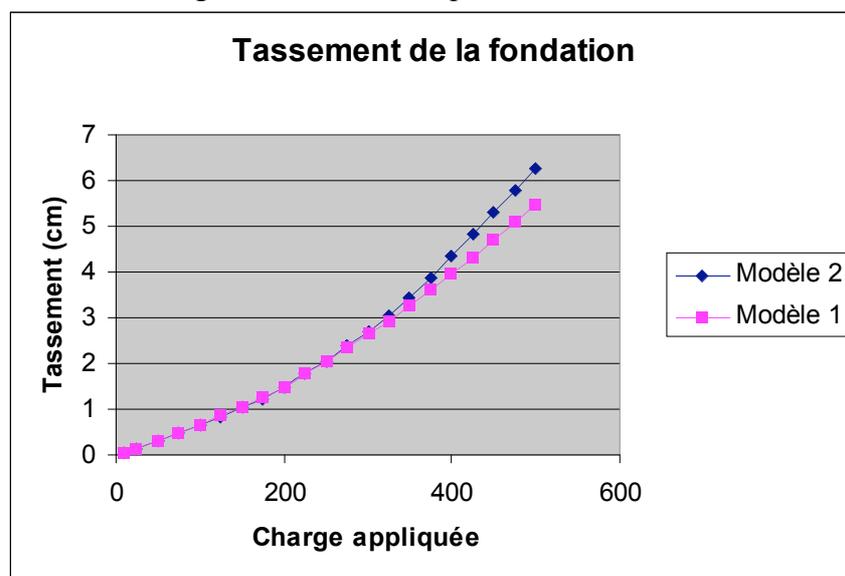


Figure 5 : Tassement comparé pour les deux modèles

Par ailleurs, le but de ce nouveau modèle était également de déterminer la résistance de la semelle elle-même à la charge. Jusqu'à 500 kPa, le champ de contrainte dans la semelle reste trop faible pour la faire se disloquer.

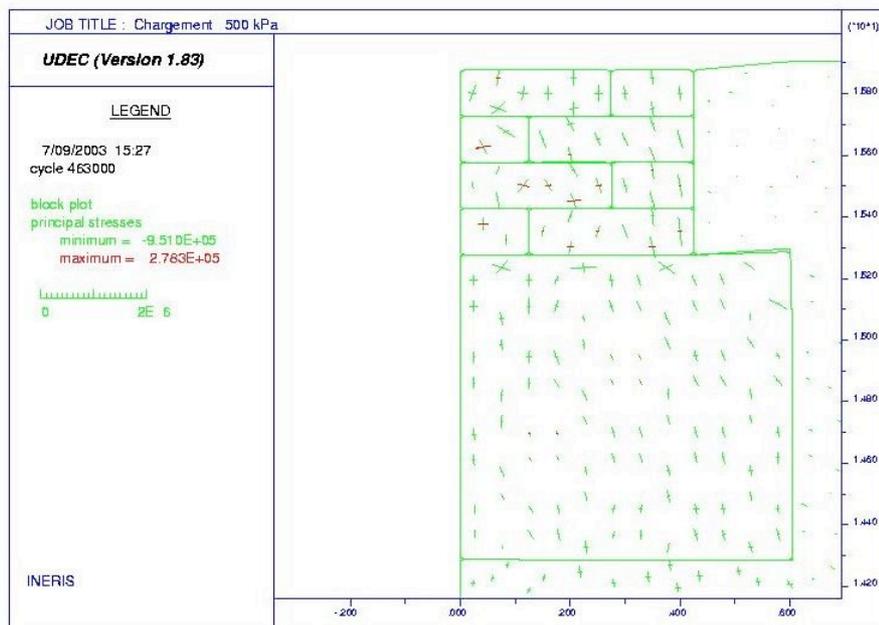


Figure 6 : Modèle n°2, champ de contrainte dans la fondation (chargement à 500 kPa)

Certes la partie inférieure comporte des points qui entrent en plasticité mais les déplacements restent verticaux et homogènes dans la structure. Cela vient évidemment aussi de la structure assez symétrique du modèle. Il semble donc que la structure même de la fondation ne soit pas limitante dans la charge que l'on peut appliquer à la semelle étudiée.

4. Conclusion

En conclusion de la modélisation transverse de la fondation supportant l'église de Umm Amr, on peut dire que la capacité portante du sol a sans doute limité la hauteur du bâtiment s'appuyant sur cette semelle. On peut estimer qu'au-delà d'une charge de 260 kPa (ce qui équivaut à un mur en kurkar plein de 15 m de haut), les bâtisseurs auraient dû faire face à de grosses difficultés de tassement et en particulier de tassement différentiel. Des traces de ces problèmes devront être décelées sur le terrain. Par ailleurs, les différentes hypothèses sur la structure de l'église qui seront testées par la suite devront se référer à cette valeur de 260 kPa.

2^{ème} partie : Détermination de la charge devant être supportée par la fondation

Suite à la modélisation de la fondation et de la détermination de la charge limite pouvant être supportée par celle-ci, on s'intéresse à la charge que représente le bâtiment reconstitué d'après les données archéologiques et architecturales. Cette reconstitution a été effectuée à l'aide de tracés régulateurs. En effet, les églises de cette époque obéissent à des règles géométriques, on peut donc avoir une bonne idée de ce qu'elle était en appliquant ces règles à partir du plan au sol dont on dispose. . Cela a abouti à la production de coupes longitudinales⁵ qui ont été reproduites à l'aide du logiciel UDEC. La restitution n'est pas unique mais la géotechnique peut parfois aider à choisir entre plusieurs possibilités comme on le verra

Les deux parties de l'édifice qui ont été étudiées sont le stylobate Sud et la façade Ouest. Différents modèles pour chaque partie ont été utilisés et comparés pour confronter les valeurs de contraintes à la charge limite de 260 kPa déterminée précédemment. La confrontation s'est avérée assez complexe car d'une part le caractère 2D du modèle fausse les résultats et d'autres part, pour le stylobate particulièrement, la fondation reçoit des appuis ponctuels (colonnes) dont la valeur de la charge excède nettement la contrainte limite mais cette charge se propage bien dans la fondation. Il a donc fallu comparer les valeurs de contrainte à la base de la fondation.

I. Modélisation du stylobate Sud

1. Modèle n°1 : la représentation stricte de la coupe

Le premier modèle ne présente pas d'extension latérale ce qui interdit toute étude de stabilité du bâtiment. Cependant, il s'est avéré que limiter le modèle en profondeur conduisait à surestimer la valeur de la contrainte au niveau de la fondation, il a donc fallu représenter une couche de sable en dessous de la fondation. Par ailleurs, comme il s'agit d'un mur, et donc que la contrainte dans la troisième dimension est une contrainte principale et vaut 0, le modèle des contraintes planes est bien adapté à la situation sauf pour la partie enfouie. Il faudra cependant se contenter d'une étude en élasticité et non en élasto-plasticité (qui n'est pas permise par le logiciel). Pour le but qui a été fixé, ce n'est pas important de toutes façons. Un raffinement intéressant consiste en la représentation de la maçonnerie dans la fondation, puisque, au final, se sont les valeurs de contrainte à ses abords qui motivent cette modélisation. La représentation dans la maçonnerie dans les autres parties du mur s'est avérée très coûteuse en temps de calcul et plutôt inutile.

⁵ Elter, René, juillet 2003, c.f. Annexes

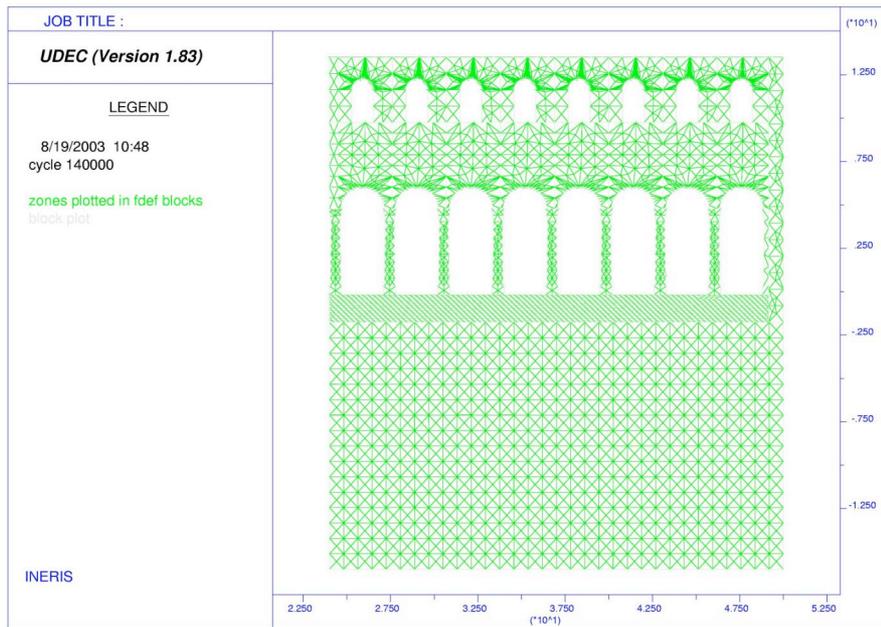


Figure 7 : Le modèle du stylobate et son maillage

Les blocs sont choisis déformables. La plupart du mur est en kurkar dont nous avons déjà vu les propriétés dans la modélisation de la fondation, les colonnes et leurs chapiteaux sont en marbre et le sable aura les mêmes propriétés que pour le modèle de la fondation. Des études en cours ont pour but de déterminer l'origine exacte du marbre⁶ mais quoiqu'il en soit, il est très comparable aux marbres italiens de type Carrare. Sa masse volumique doit donc s'approcher de 2700 kg/m^3 , son module d'Young est voisin de 50 GPa et son coefficient de Poisson proche de 0.2⁷. La méthode pour déterminer les propriétés des joints reste la même que pour la fondation.

⁶ Mechling, Jean-Michel, 2003

⁷ Alber, Hauptfleisch, « Generation and visualization of micro fractures in Carrara marble for estimating fracture toughness, fracture shear and fracture normal stiffness », International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 36 (1999) 1065-1071

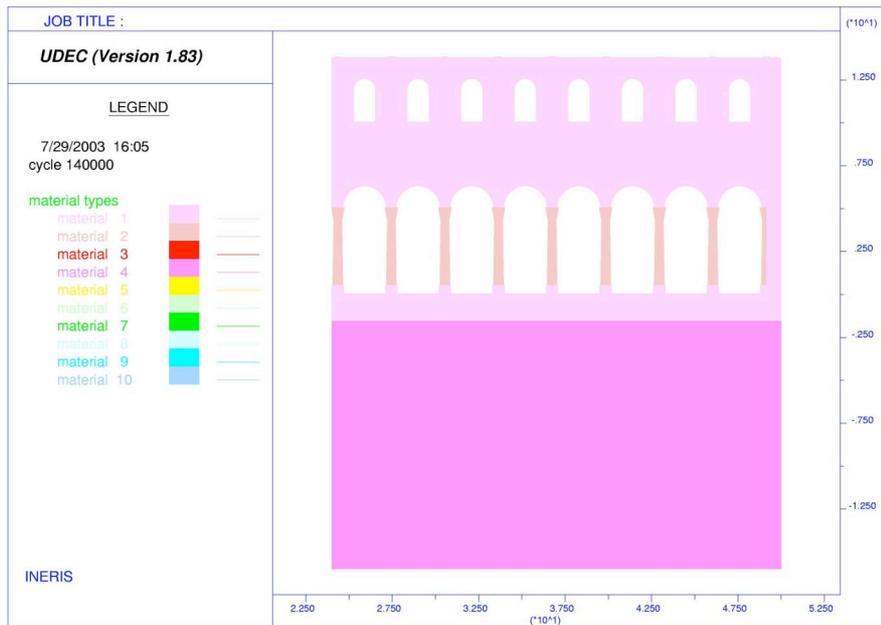


Figure 8 : Les différentes parties du modèle du stylobate

Le chargement s'effectue par la gravité et les conditions aux limites consistent en un blocage latéral et inférieur.

- Dans une première phase de calcul, on considère que tout le modèle est en kurkar (même les vides).
- Puis on donne les vraies propriétés des matériaux et des joints qui étaient au départ indestructibles.
- Ensuite, on supprime les blocs qui représentent les vides c'est à dire les fenêtres et les blocs entre les colonnes.
- La dernière phase consiste à charger le dessus pour simuler la présence de la toiture. Cette opération est assez délicate car appliquer une charge ponctuelle avec UDEC relève du mystère et si l'on veut charger sur des surfaces représentant les appuis des fermes, il faut prendre garde au maillage qui ne permet que le chargement d'éléments entiers. Pour contourner ce problème, il suffit de prévoir dans la géométrie des petits blocs de la largeur des fermes sur lesquels on chargera ensuite. La valeur de la contrainte appliquée sera obtenue par le rapport de la force déterminée dans le rapport « Charpente »⁸ par le produit du diamètre des poutres et de 0.7 m, largeur du mur. Cela donne donc 92.5 kPa.

Les résultats sont obtenus de différentes manières, UDEC permet en particulier de tracer la valeur d'un paramètre suivant une ligne qu'on lui a donnée. Au niveau du bas de la fondation on trouve celle-ci pour σ_{yy} :

⁸ Michel, Clotaire, « La Charpente de l'église de Umm Amr », Nancy, juillet 2003



Figure 9 : Modèle du stylobate, la contrainte σ_{yy} à la base de la fondation

Ce graphe est centré sur l'abscisse de l'axe de symétrie d'une colonne et a pour extrémités l'axe de symétrie de ses deux voisins. Les valeurs sont plus explicites sur ce graphe :

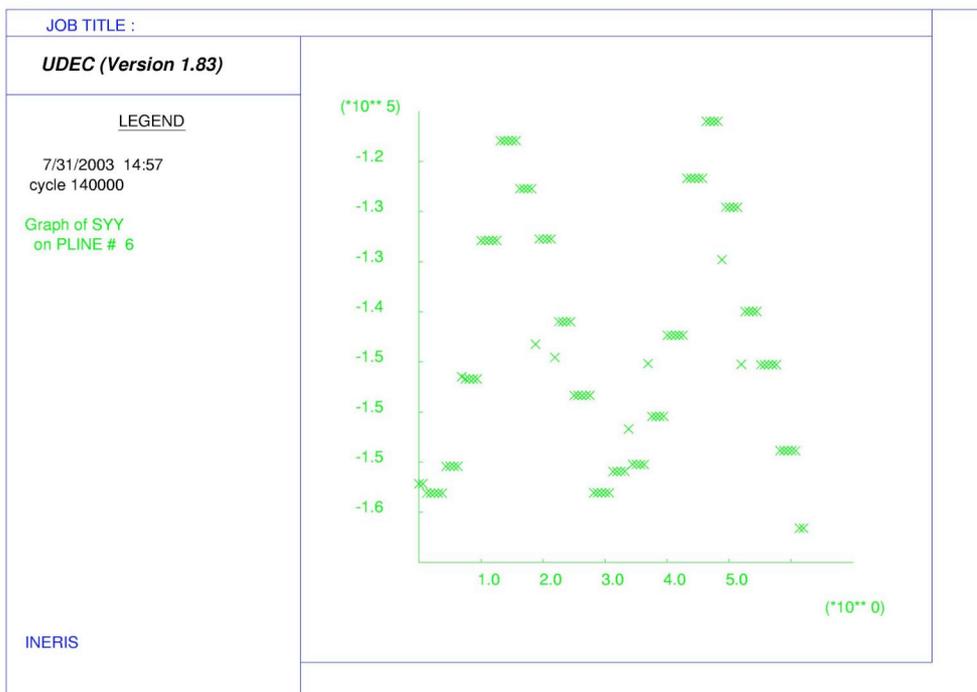


Figure 10 : Modèle du stylobate, la contrainte σ_{yy} à la base de la fondation

Au niveau du sol, on réalise le même type de courbe qui possède 2 trous puisque, à ces endroits, la contrainte est nulle (surfaces libres entre 2 colonnes) :

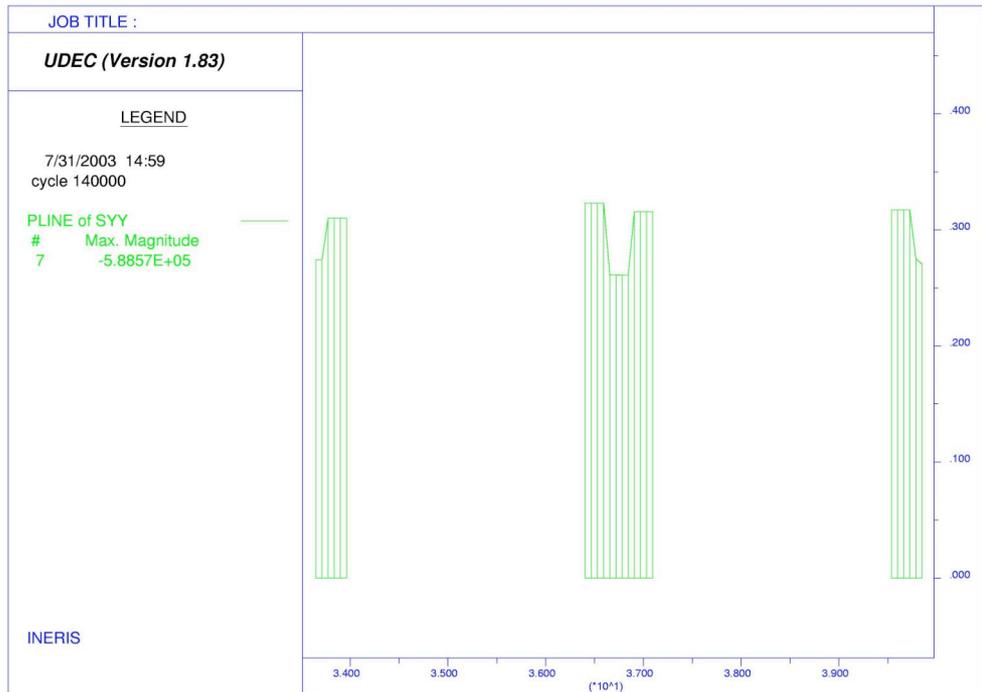


Figure 11 : Modèle du stylobate, la contrainte σ_{yy} au niveau du sol

Au niveau du sol, on trouve donc des contraintes très importantes sous les colonnes et nulles ailleurs. L'ordre de grandeur de la contrainte sous les colonnes est 560 kPa soit près de 2.5 fois la contrainte limite calculée précédemment. Cependant, comme cette contrainte est localisée, elle se propage dans la fondation pour ne plus dépasser 160 kPa à la base de la fondation. Ainsi dans la fondation, la charge oscille entre 120 et 160 kPa, ce qui donne une amplitude de 40 kPa soit près d'un cinquième de la contrainte limite ce qui montre l'incertitude que l'on peut avoir sur la stabilité réelle du bâtiment.

On peut voir la propagation de la contrainte en plan :

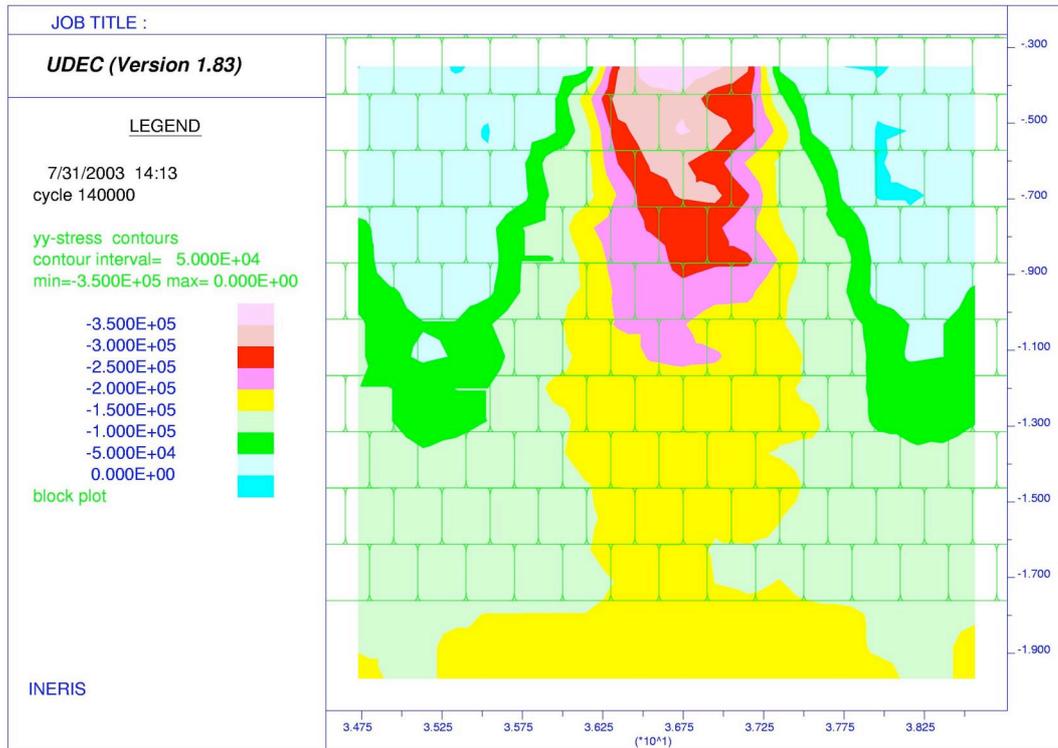


Figure 12 : Modèle du stylobate, propagation de la contrainte σ_{yy} sous une colonne dans la fondation

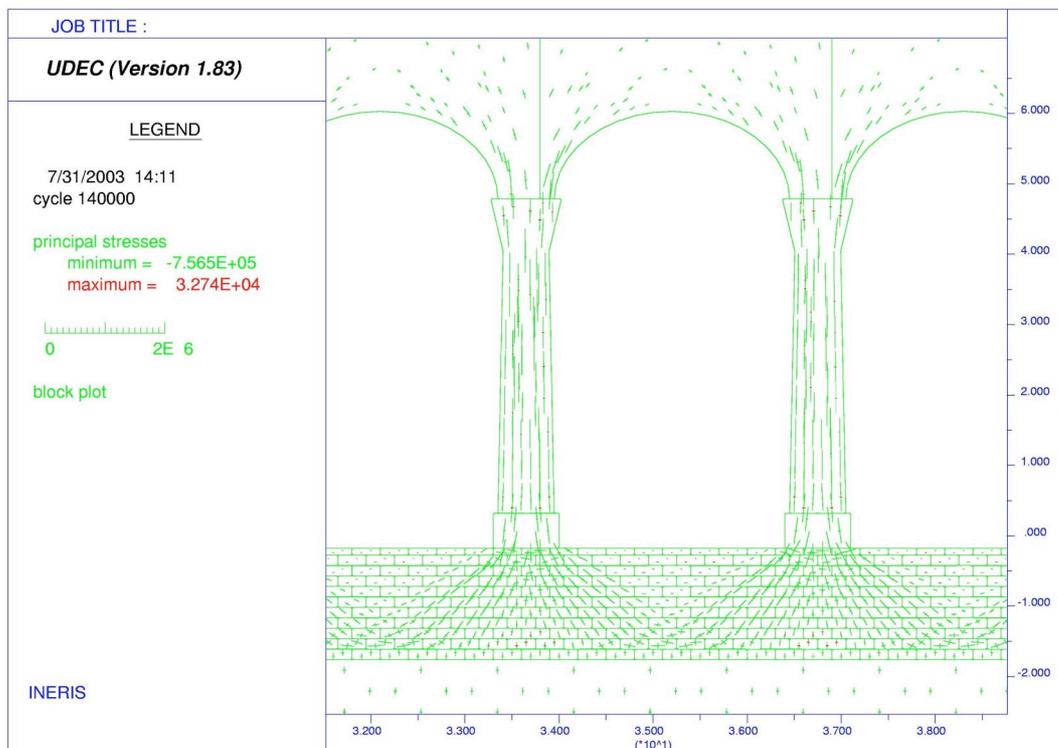


Figure 13 : Modèle du stylobate, champ de contrainte

Compte tenu du fait que le modèle n'a pas d'extension latérale, les seules valeurs que l'on peut considérer sont celles situées au milieu de celui-ci. Un raffinement consiste donc à donner une extension à droite du modèle.

2. Modèle n°2 : une extension latérale à droite

A gauche, l'église se poursuit d'une manière compliquée alors qu'à droite, il ne s'agit dans la réalité que de sable, on ajoute donc une portion à droite, laissant ainsi le mur libre de tout mouvement.

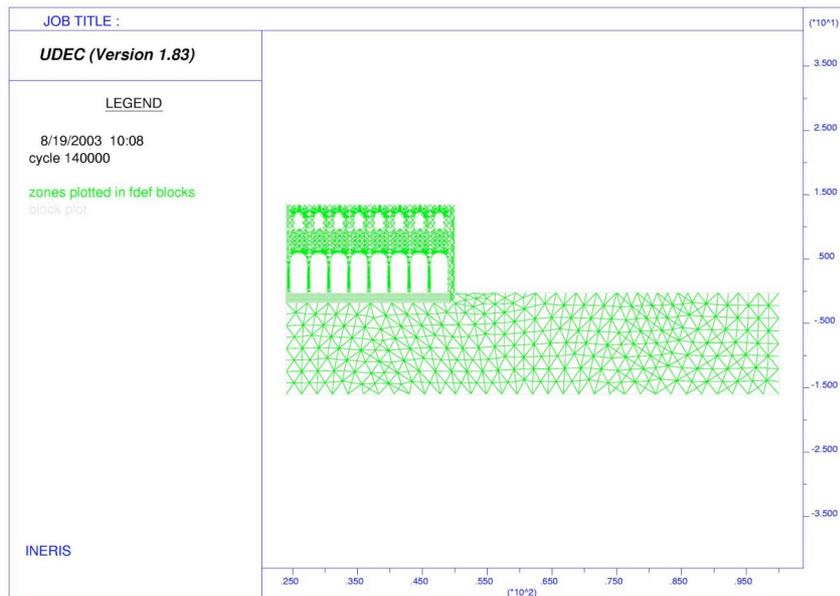


Figure 14 : Le maillage du modèle n°2 du stylobate

Les résultats dans la partie gauche ne sont toujours pas exploitables, en revanche, on obtient pour la contrainte σ_{yy} une courbe lissée pour la partie droite.

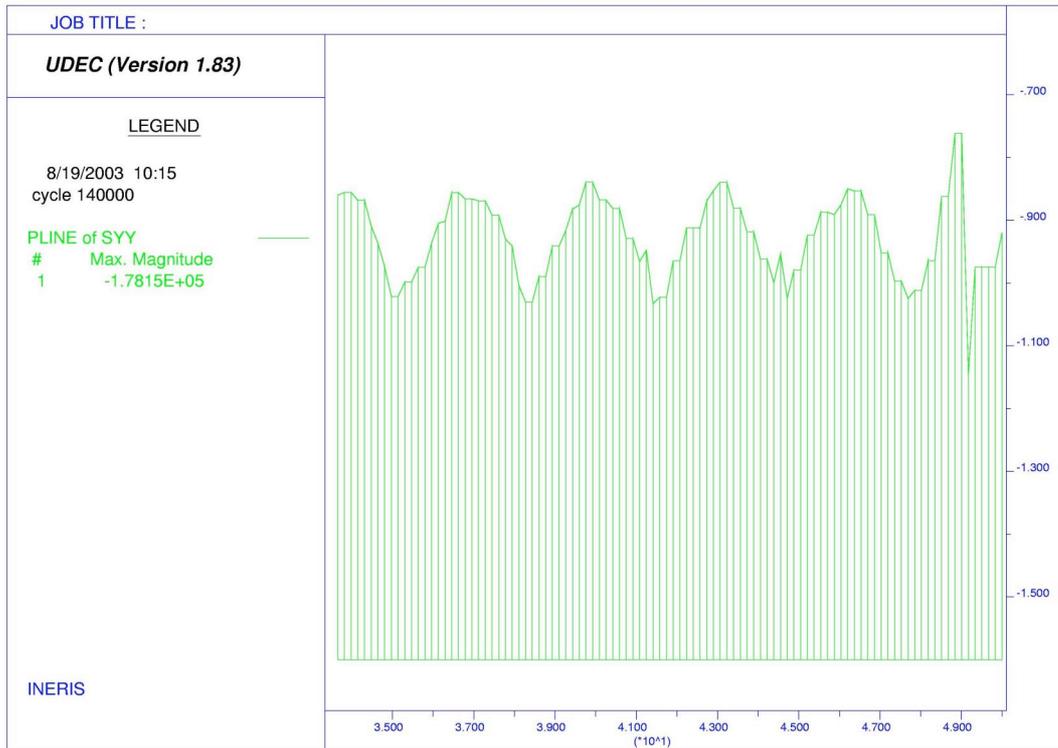


Figure 15 : Modèle n°1 du stylobate, σ_{yy} à la base de la fondation pour la moitié droite du stylobate

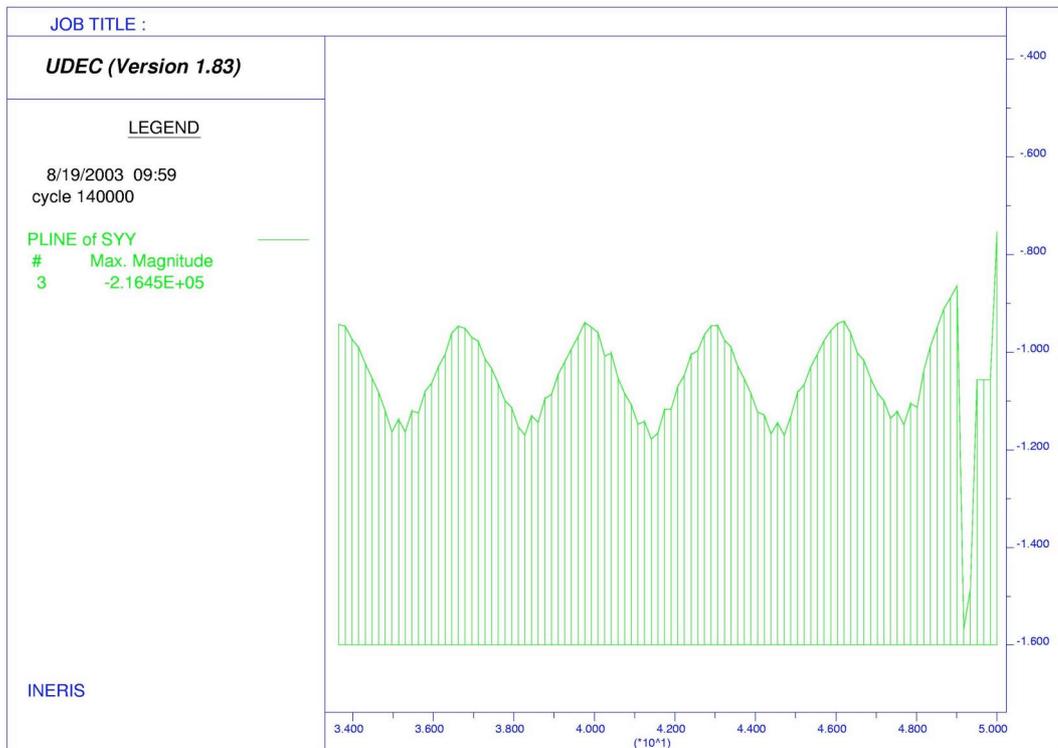


Figure 16 : Modèle n°2 du stylobate, σ_{yy} à la base de la fondation pour la moitié droite du stylobate

On observe également une légère différence dans les valeurs extrêmes des oscillations : entre 120 et 160 kPa pour le premier modèle contre 110 et 170 kPa pour le second. La moyenne reste donc la même mais les écarts à cette moyenne étaient sous-estimés ce qui ne fait que renforcer l'idée selon laquelle un tassement différentiel important a pu apparaître.

Il paraît également intéressant de réaliser un calcul en élasto-plasticité, pour voir si ce modèle simple peut conduire au tassement différentiel que l'on peut attendre.

3. Modèle n°3 : déformations planes et comportement élasto-plastique

Pour réaliser un calcul en élasto-plasticité, il faut donc revenir au modèle des déformations planes. Il faut également changer le déroulement des phases de calculs. En effet, lorsque l'on affecte aux matériaux un comportement élasto-plastique (ici le sable seulement), il ne faut pas que la plasticité apparaisse dès le premier cycle car un cycle n'a pas de signification physique et la plastification peut n'être due qu'à l'amortissement employé dans le calcul. Il faut donc artificiellement activer les différentes parties progressivement.

- Dans un premier temps, le bloc (prédécoupé) est constitué de sable jusqu'à l'altitude 0 et d'un matériau fictif de densité 1 kg/m^3 mais aux propriétés du kurkar (« kurkar léger ») sur la partie supérieure.

- Ensuite, on retire les parties qui doivent représenter le « ciel » ainsi que les voûtes et les fenêtres. Les matériaux du bâtiment sont entièrement en « kurkar léger », y compris la fondation ce qui signifie que le terrain a été creusé pour la construire. Dès que l'on a utilisé un matériau fictif, on a pris garde de donner à ses interfaces une cohésion et une résistance à la traction infinie pour éviter les problèmes de séparation de ces blocs qui n'ont pas encore été construits.

- Dès lors on utilise le comportement élasto-plastique pour le sable et on remet à zéro tous les paramètres qui sont mesurés dans le temps comme le tassement (cumulé). Pour éviter une dislocation intempestive des blocs de kurkar, on affecte une cohésion au joint kurkar-kurkar pour simuler la présence d'un mortier. La valeur est choisie à partir des mortiers égyptiens utilisés pour la restauration⁹. Ceux de Karnak ont une cohésion de 2 MPa et une résistance à la traction de 1 MPa. Comme leur qualité est bien supérieure à ce qui était fait à l'époque, on choisira le dixième de ces valeurs.

- On construit ensuite la fondation en kurkar et les colonnes en marbre.

- Puis on introduit un autre matériau fictif d'une densité de 500 kg/m^3 pour mettre en charge la partie supérieure et le mur de droite.

- Après quelques étapes de cette nature, les matériaux du bâtiment possèdent leurs vraies propriétés.

- Pour finir, on charge au niveau des fermes pour simuler la présence de la toiture.

Il est à noter que l'on affine le maillage sur les 4 premiers mètres de sable pour améliorer les résultats en plasticité et que le modèle va maintenant à 50 m de profondeur, sans lesquels la profondeur affectait le champ de déplacement résultant.

On peut comparer les résultats de la contrainte verticale à la base et au sommet de la fondation avec ceux trouvés précédemment :

⁹ Verdel, Thierry

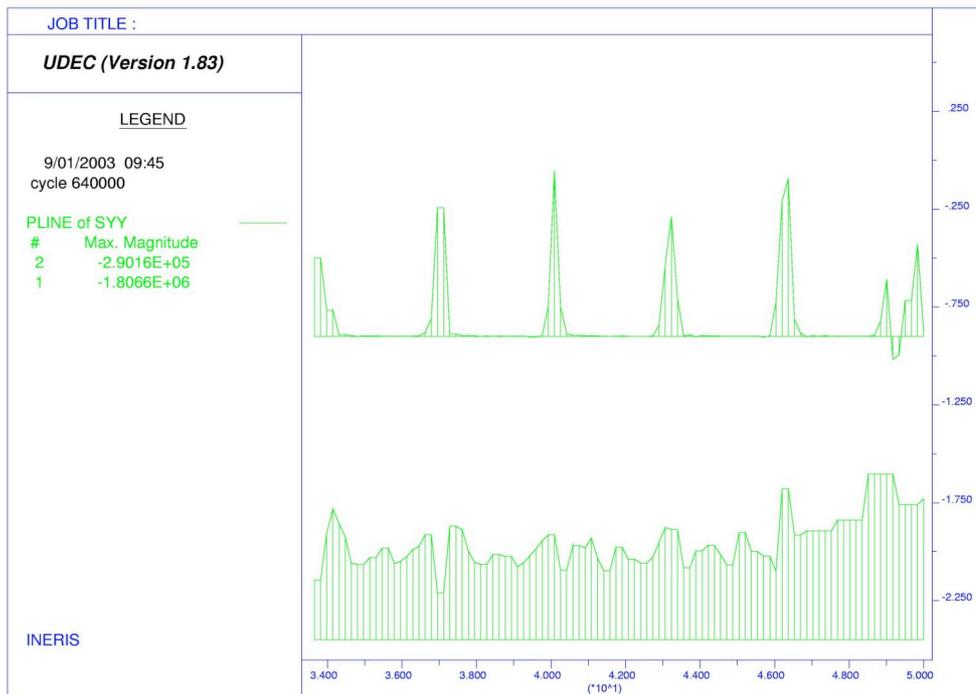


Figure 17 : Modèle n°3, σ_{yy} à la surface et à la base de la fondation pour la moitié droite du stylobate

Ce qui est net à première analyse c'est que les oscillations sont beaucoup moins nettes et lisses que précédemment à la base. Les pics de contrainte au centre des colonnes à la surface correspondent même à des valeurs plus faibles à la base. Par ailleurs les valeurs à la base des colonnes sont beaucoup plus fortes (jusqu'à 1.8 MPa) et beaucoup moins bien réparties que précédemment. Les blocs de kurkar à la base des colonnes seraient ainsi ponctuellement mis à mal (environ 50 % de la résistance à la compression du kurkar).

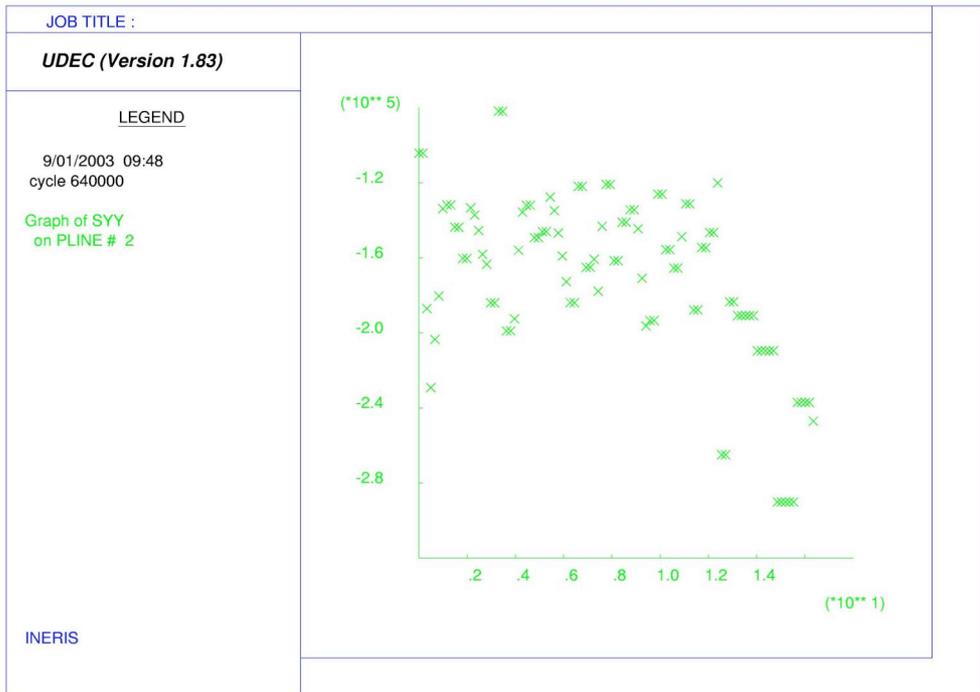


Figure 18 : Modèle n°3, la contrainte σ_{yy} à la base de la fondation

Les valeurs sont également un peu différentes (entre 120 et 200 kPa) mais l'ordre de grandeur reste le même.

On peut également voir la répartition des contraintes sur différentes représentations :

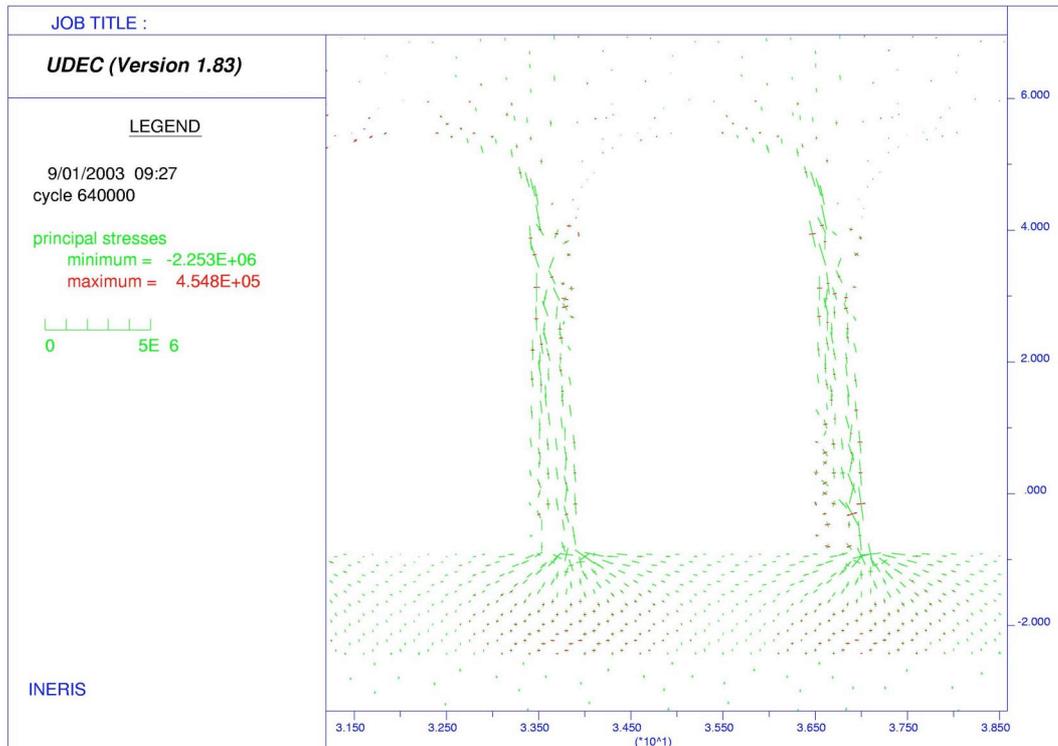


Figure 19 : Modèle n°3, champ de contrainte dans les colonnes, les voûtes et la fondation

La répartition n'est pas aussi nette que précédemment est paraît peu symétrique comme on le verra par la suite.

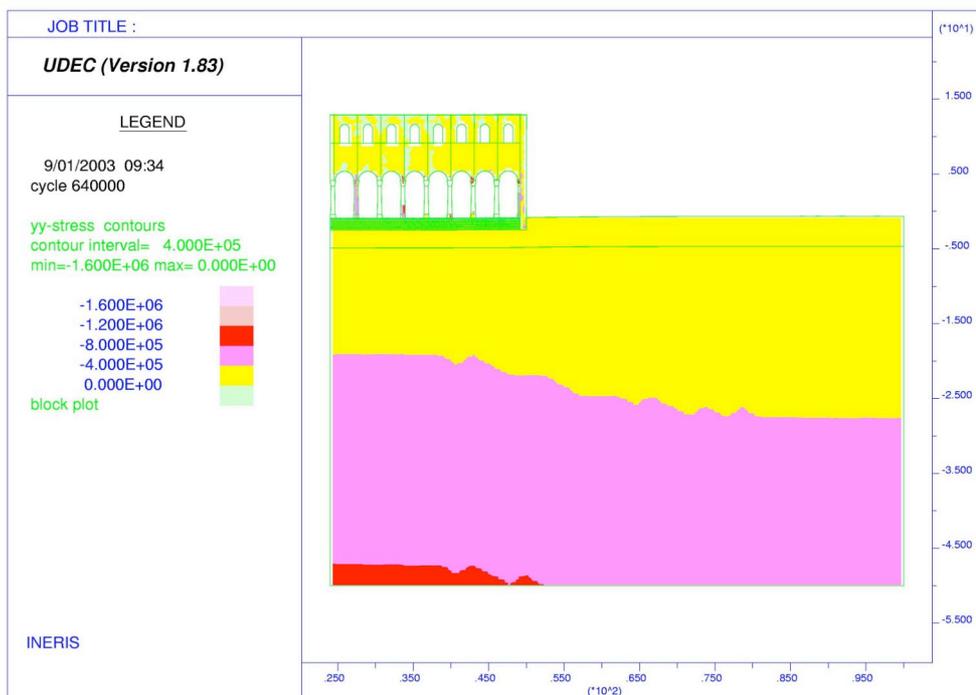


Figure 20 : Modèle n°3, contrainte σ_{yy} dans le modèle, le bâtiment apporte une sur-contrainte dans le sol

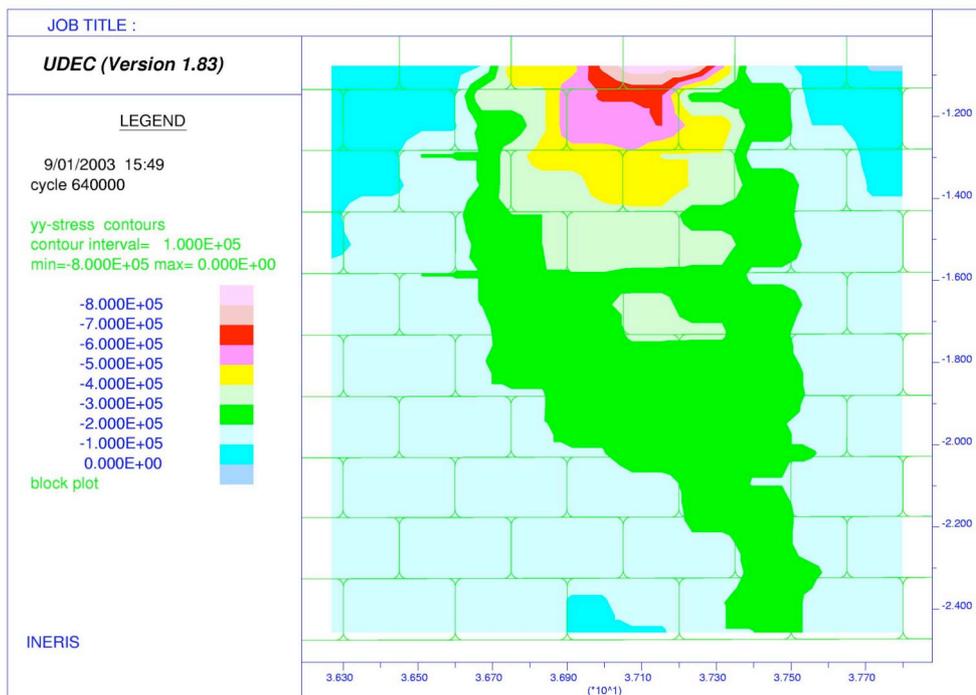


Figure 21 : Modèle n°3, propagation de la contrainte σ_{yy} sous une colonne dans la fondation

L'étude des tassements n'est pas satisfaisante :

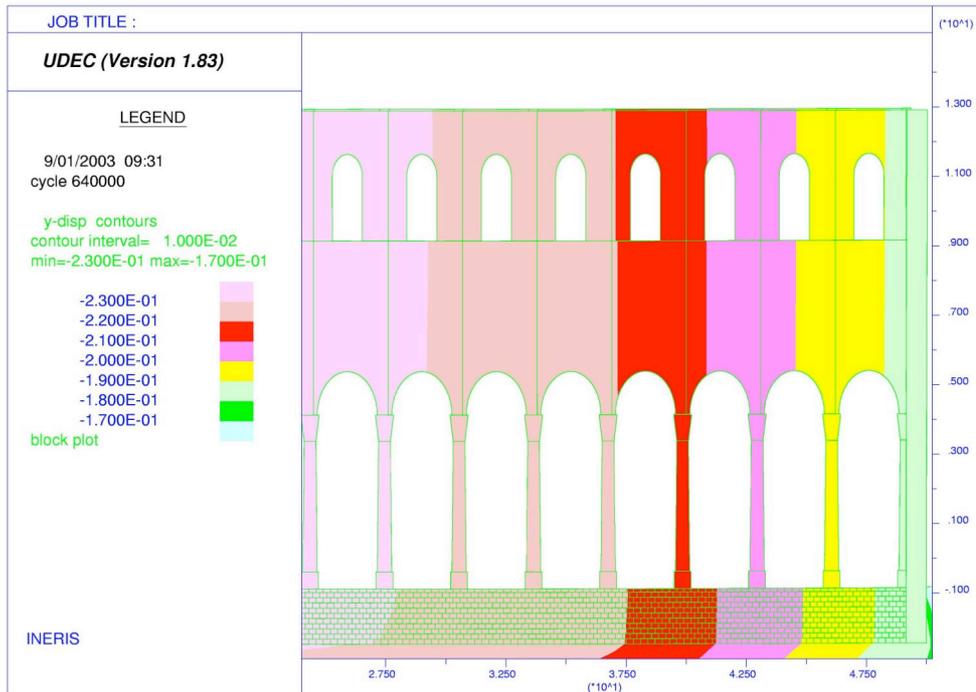


Figure 22 : Modèle n°3 du stylobate, déplacement selon y

En effet, le blocage à gauche simule une symétrie axiale. Le fait de charger le modèle à gauche revient donc au chargement du milieu d'une poutre entre deux appuis. Le tassement maximal intervient au milieu de la poutre. C'est bien ce à quoi on est confronté ici.

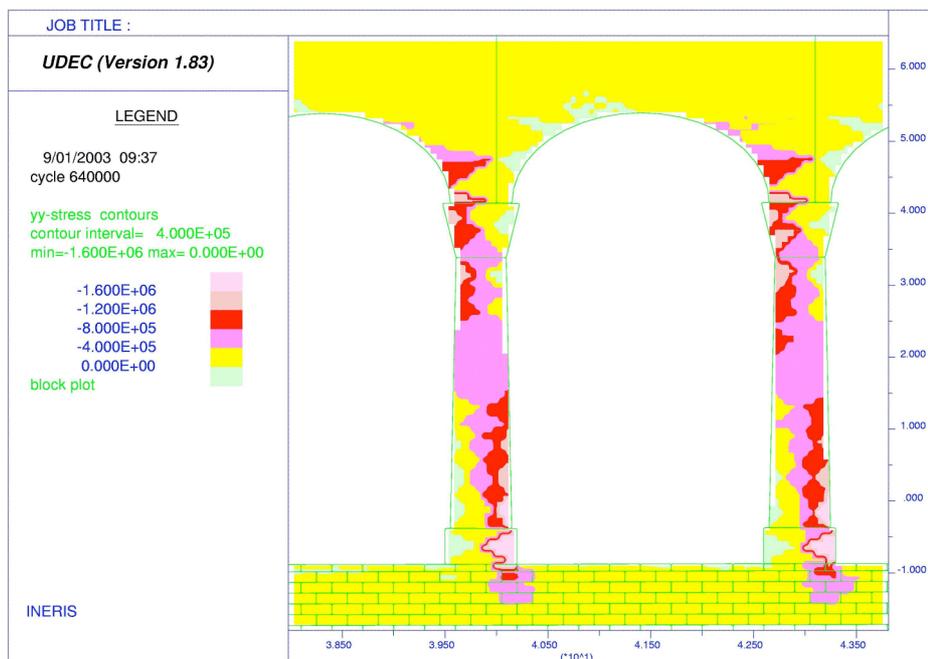


Figure 23 : Modèle n°3, contrainte σ_{yy} dans les colonnes et dans la fondation

Il en est de même pour la contrainte σ_{yy} dans les colonnes qui n'est pas symétrique. Il ne s'agit pas de la rotation du bâtiment qui ne dépasse pas 2° mais bien d'une répartition des contraintes biaisée par la condition en déplacement à gauche.

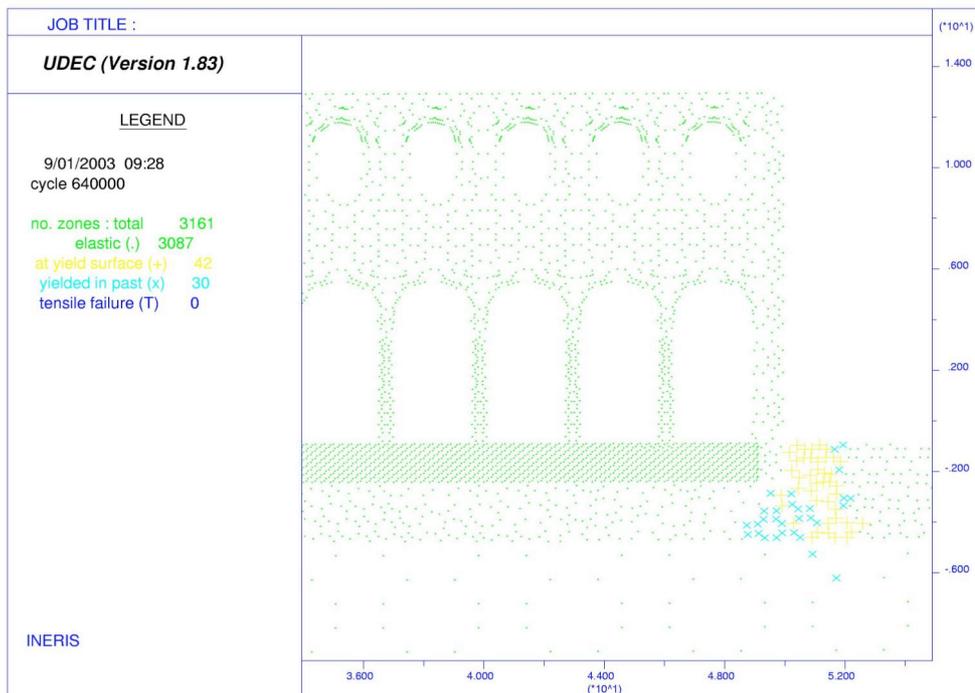


Figure 24 : Modèle n°3 du stylobate, points plastiques

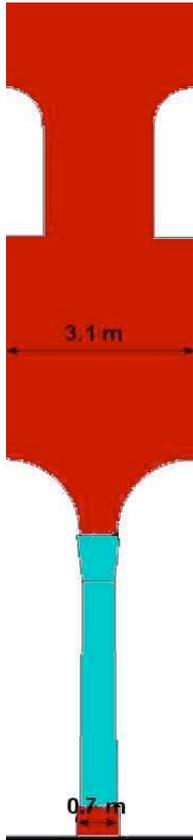
En ce qui concerne l'étude en plasticité, on observe en fait peu de points plastiques. Seul le mur de droite poinçonne dans le sable ce qui montre qu'on est à la limite de plastification du sol mais comme il manque la troisième dimension, on ne peut pas voir le poinçonnement de la fondation en entier. Il faut tout de même noter que ce mur impose une charge intrinsèquement plus forte au sol. D'après UDEC, elle est de 237 kPa à la base de la fondation, analytiquement on trouve qu'il pèse $0.85 \cdot 0.85 \cdot 15.35 \cdot 1700 = 19$ tonnes réparties sur une surface de $0.85 \cdot 0.85 = 0.7 \text{ m}^2$ soit une charge de 260 kPa (c'est à dire la charge limite de la fondation).

4. Calculs analytiques et validation des modèles

4.1. Charge sous une colonne

On considère la tranche du bâtiment supportée par une colonne, elle fait 3.1 m de large et est centrée sur le plan de symétrie de la colonne perpendiculaire au mur. La partie au-dessus du chapiteau est un pavé de kurkar de $3.1 \cdot 8.75 \cdot 0.7 = 19 \text{ m}^3$ auquel on retire un pavé de $1.25 \cdot 1.875 \cdot 0.7 = 1.6 \text{ m}^3$ (deux demi-fenêtres) et deux moitiés de cylindres, d'un volume de $\frac{1}{2} \cdot (\pi \cdot 0.625^2 \cdot 0.7 + \pi \cdot 1.25^2 \cdot 0.7) = 3.9 \text{ m}^3$. Avec une masse volumique de 1700 kg/m^3 cela donne un poids de 23 tonnes environ.

On rappelle la formule du volume du tronc de cône : $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot H \cdot (r^2 + R^2 + r \cdot R)$. Une colonne a donc un volume de $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3.75 \cdot (0.305^2 + 0.25^2 + 0.305 \cdot 0.25) = 0.9 \text{ m}^3$ et son chapiteau $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0.75 \cdot (0.25^2 + 0.375^2 + 0.375 \cdot 0.25) = 0.2 \text{ m}^3$. Ils sont en marbre qui a une masse volumique de 2700 kg/m^3 ce qui ajouté au socle en kurkar de $0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.85 = 0.3 \text{ m}^3$ donne une

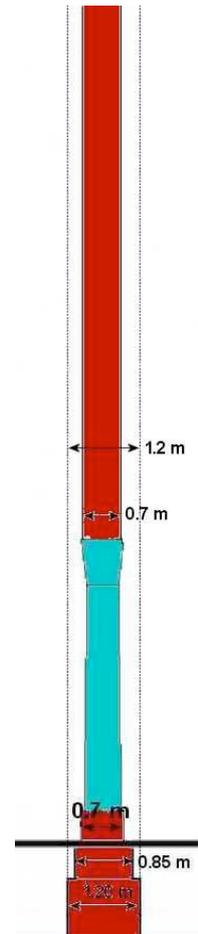


masse de 3.6 tonnes. Ajouté à tout cela la masse de la toiture supportée (c.f. Calcul toiture) qui est de 5.4 tonnes, une tranche de bâtiment a donc une masse de 32 tonnes environ. La surface de transfert de cette charge à la fondation est celle du socle de la colonne, c'est-à-dire $0.7 \times 0.85 = 0.6 \text{ m}^2$ ce qui donne une charge de $32000 \times 9.81 / 0.6 = 523 \text{ kPa}$, en fait plutôt 525 kPa si on réalise un calcul plus précis.

Or, la charge mesurée par le logiciel dans le modèle 2D est la charge qui existerait si le bâtiment avait une épaisseur constante, prenons 0.7 m. Or, cela change au niveau des colonnes qui élargissent le mur d'appui à 0.85 m (c.f. schéma transverse à droite). En théorie, il faut donc multiplier le résultat obtenu numériquement (560 kPa) par le rapport $0.7 / 0.85$ ce qui donne environ 460 kPa. Le calcul numérique sous-estime donc légèrement la charge à la base des colonnes (12 % d'erreur). Les deux modèles (analytique et numérique) diffèrent par quelques points : On prend en compte la forme de tronc de cône des colonnes dans le calcul analytique et pas dans le calcul numérique qui consiste simplement en une extrusion de l'image 2D. On considère également dans le calcul analytique que la charge est constante sur toute la surface d'appui ce qui n'est pas tout à fait le cas d'après le calcul numérique, on obtient alors une valeur moyenne.

4.2. Charge à la base de la fondation

On considère toujours la même tranche de bâtiment mais cette fois jusqu'à la base de la fondation. A la masse calculée précédemment, il faut donc ajouter celle de la fondation soit $3.1 \times 0.6 \times 0.85 \times 1700 + 3.1 \times 1 \times 1.2 \times 1700 = 9$ tonnes. La surface de contact avec le sol est alors de $3.1 \times 1.2 = 3.7 \text{ m}^2$ ce qui donne une charge de $41000 \times 9.81 / 3.7 = 108 \text{ kPa}$. On ne peut pas comparer cette valeur directement à la valeur moyenne trouvée numériquement qui est proche de 140 kPa. En effet, cette valeur est largement surestimée du fait de la géométrie de la fondation. Le modèle numérique considère que l'épaisseur du mur à la fondation est constante prenons 1.2 m, il faut donc supprimer une grande partie du mur qui n'existe pas dans la réalité. Si on considère que la masse volumique est homogène, on peut prendre la masse (donc la contrainte) réelle comme une fraction de la masse trouvée numériquement. Le coefficient de proportionnalité est donné par le rapport des surfaces dans la troisième dimension de l'espace. On trouve que la contrainte réelle ne constitue que 61.5% de la contrainte calculée numériquement pour les tranches pleines. En ne prenant que cette fraction de la contrainte calculée par UDEC, on a une valeur qui reflète mieux la réalité même si elle ne prend pas en compte les tranches où il existe des vides. Elle vaut alors seulement 85 kPa en moyenne et varie entre 65 et 105 kPa, pour les modèles en élasticité, 100 kPa en moyenne et des valeurs extrêmes de 75 et 125 kPa pour le modèle élasto-plastique. L'erreur par rapport au calcul analytique atteint alors 20 % pour le modèle en élasticité, l'erreur est inférieure à 10 % pour le dernier modèle. Cette erreur vient d'abord du fait que la masse volumique n'est pas homogène dans le mur, mais surtout que le modèle analytique suppose que la contrainte est constante à la base de la fondation ce qui est faux comme on l'a vu dans le modèle de la fondation d'une part et dans le modèle du stylobate à cause des colonnes d'autre part.



En conclusion, si les ordres de grandeur des calculs numériques sont conformes à la théorie, les valeurs relevées doivent être corrigées à l'aide d'un modèle analytique. Un modèle abouti décrivant le comportement élasto-plastique permet alors d'obtenir des valeurs relativement précises.

5. Confrontation avec la charge limite

Si on compare directement les valeurs des charges de la fondation dans les différents modèles numériques et analytiques à la contrainte limite calculée précédemment, on trouve que l'on dépasse largement la valeur tolérée ($460 \gg 260$). Mais on ne prend alors pas en compte le fait que les colonnes exercent une charge ponctuelle sur la fondation et que cette charge se propage pour devenir beaucoup plus faible à la base de la fondation.

Pour savoir si on dépasse ou non la capacité portante du sol, on peut regarder la répartition des contraintes dans la fondation à la contrainte limite telle que la donne le modèle de la fondation seule.

L'hypothèse sous-jacente à ce raisonnement est que les contraintes au sommet et à la base de la fondation sont corrélées linéairement (au décalage près). La pertinence de cette hypothèse, facile à démontrer en élasticité linéaire, l'est beaucoup moins pour le modèle élasto-plastique que l'on emploie. Il faut garder en tête que l'on commet sans doute une erreur ici.

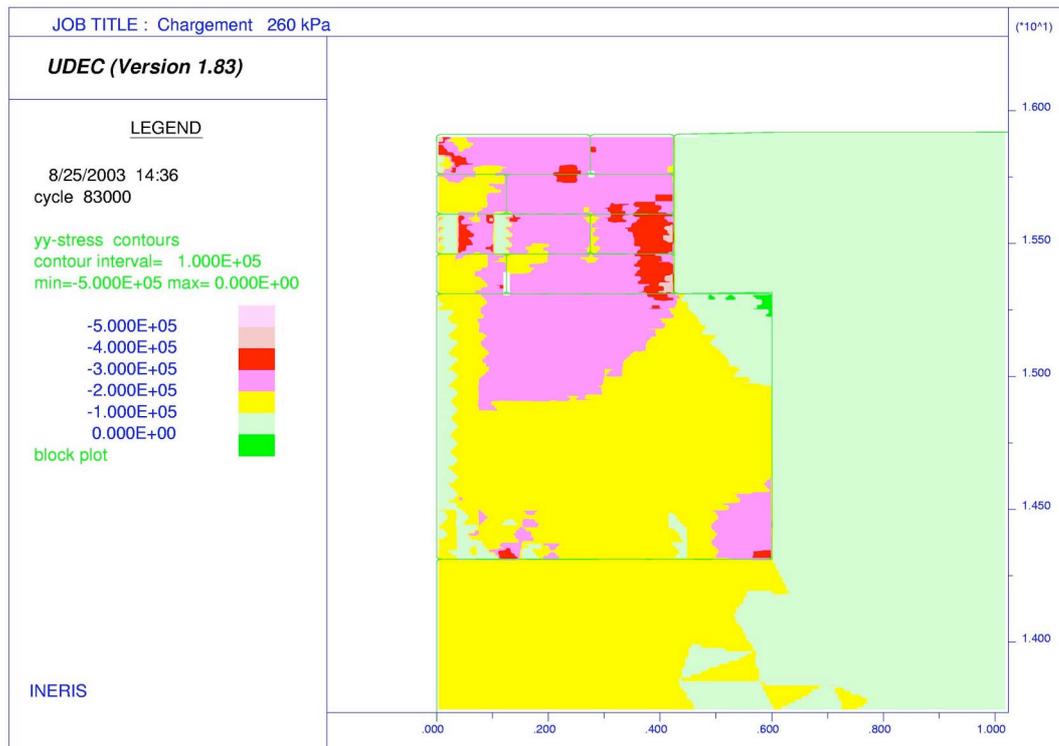


Figure 25 : Modèle de la fondation, contrainte σ_{yy} pour une charge de 260 kPa

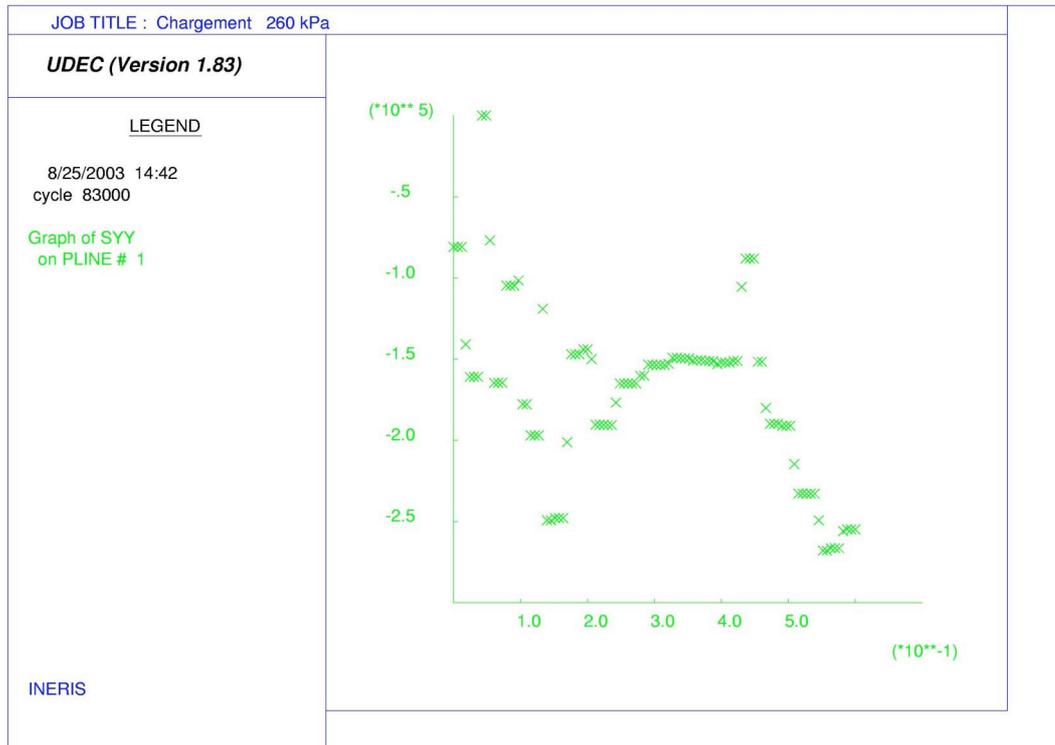


Figure 26 : Modèle de la fondation, contrainte σ_{yy} pour une charge de 260 kPa à la base de la fondation

On remarque que les valeurs sont assez dispersées à cause de la plastification mais le centre de la fondation présente une valeur à peu près constante sur laquelle on peut se baser : 150 kPa. Cette valeur ne nécessite pas de correction car la fondation est une semelle infinie dans la troisième dimension de l'espace.

On se situe en dessous de cette valeur le long du stylobate sauf pour la partie droite où on a vu que le mur appliquait une contrainte de 260 kPa. Pour la majeure partie du stylobate nous pouvons calculer un coefficient de sécurité qui est normalement le rapport entre contrainte limite et la contrainte maximale attendue, mais nous prendrons les valeurs à la base de la fondation : $F = \frac{150}{125} = 1.2$ C'est un coefficient assez faible par rapport à ceux employés

actuellement dans le bâtiment qui s'approchent de 2 alors que les techniques de construction sont sans doute mieux maîtrisées aujourd'hui.

Il faut par ailleurs noter que la partie à 150 kPa dans le modèle de la fondation seule est une partie qui ne plastifie pas et que la plastification n'a lieu qu'aux extrémités de la fondation ce qui peut aussi expliquer pourquoi on observe pas de plastification (donc de poinçonnement) dans le modèle du stylobate en élasto-plastique en dehors de la partie de droite. Ces considérations sont un peu spéculatives et seule la réalisation d'un modèle de la fondation en 3D pourrait les confirmer.

Quoi qu'il en soit, on peut tout de même dire qu'à l'aide d'une construction assez aérée, les bâtisseurs ont construit un stylobate imposant presque en mesure (aux erreurs de construction et de calcul près) d'être soutenu par un sol peu accueillant.

Cependant, compte tenu du faible coefficient de sécurité et de la relative méconnaissance du comportement des matériaux et de la dispersion spatiale de leurs propriétés, il est très probable qu'un tassement différentiel qu'on ne peut quantifier, a fragilisé la structure dès sa construction.

Ce qui peut également être préoccupant est le mur représenté à droite et qui est une coupe de la façade de l'église. Celui-ci poinçonne clairement dans le sable. Son étude est donc indispensable, d'autant qu'elle permettra d'étudier la stabilité de la façade du bâtiment en elle-même.

II. Modélisation du mur Ouest de l'église (façade)

L'étude du stylobate Sud amenait à s'interroger sur la stabilité du mur de façade. Celui-ci fait 16.25 m de haut au faitage selon les travaux de reconstitution des archéologues ce qui fait qu'il dépasse, en première approximation, la limite de service de la semelle, plus encore que le stylobate.

1. Un premier modèle

1.1 Géométrie et conditions aux limites

La coupe fournie par les archéologues présente 3 portes de même taille et 2 fenêtres dans la partie centrale. En considérant que le substratum rocheux se situe à 20 m de profondeur, on limite ainsi le modèle dans ce sens. La façade est entièrement symétrique, seule la moitié droite sera donc représentée. Comme elle est peu large (10 m auxquels on rajoutera 10 m de sable), le modèle est donc de dimensions raisonnables. On peut donc lui apporter des détails sans trop augmenter le temps de calcul. Seront ainsi représentés la maçonnerie, formée de blocs de 70*20*45 alternativement disposés dans la longueur et dans la largeur et les claveaux disposés en arcs pour les portes et les fenêtres. La maçonnerie de la fondation sera aussi représentée de la même manière que précédemment.

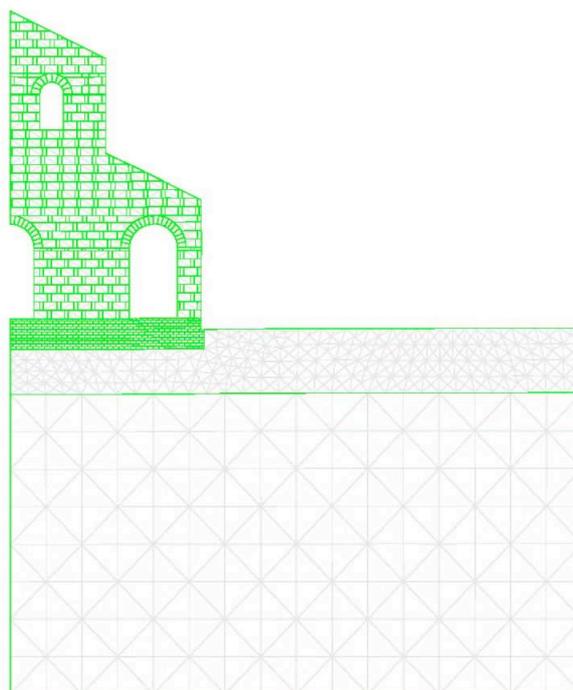


Figure 27 : Le modèle 1 et son maillage

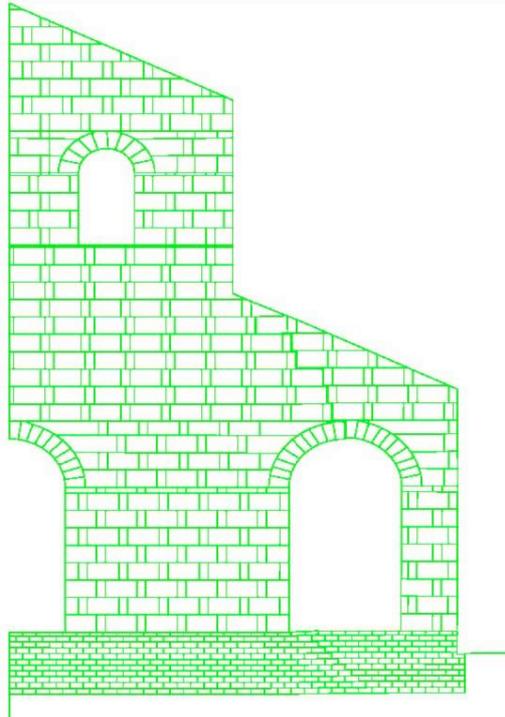


Figure 28 : Le modèle 1, zoom sur le bâtiment

La symétrie justifie le blocage à gauche et l'éloignement le blocage à droite, la présence du substratum autorisant le blocage inférieur.

1.2 Phasage du calcul

Le phasage employé simule à peu près la construction du bâtiment.

- Dans un premier temps, jusqu'au niveau 0, on a du sable, au-dessus un matériau fictif aux propriétés du kurkar mais avec une densité de 0.1 kg/m^3 et une cohésion et une résistance à la traction très fortes.
- Ensuite on retire les blocs composant les fenêtres et les portes.
- A partir de la troisième phase, on suppose que la construction commence, on remet donc tous les paramètres à 0 et on commence par construire la fondation en kurkar, tout en affectant aux matériaux un comportement élasto-plastique.
- On monte ensuite progressivement dans le bâtiment en donnant sa vraie densité au kurkar, en passant par un intermédiaire à 500 kg/m^3 .

1.3 Résultats

Il apparaît alors clairement que les nefs latérales font l'objet d'un tassement différentiel par rapport à la nef centrale et que le bâtiment se disloque.

C'est très clair en augmentant la déformation des blocs :

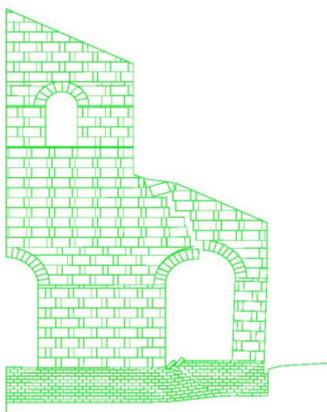


Figure 29 : La déformation des blocs du modèle 1 amplifiée par un facteur 10

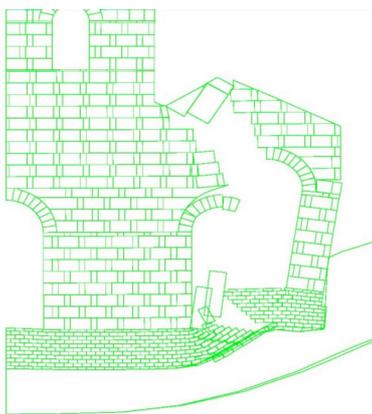


Figure 30 : La déformation des blocs du modèle 1 amplifiée par un facteur 50

Le déplacement horizontal permet de confirmer cela :

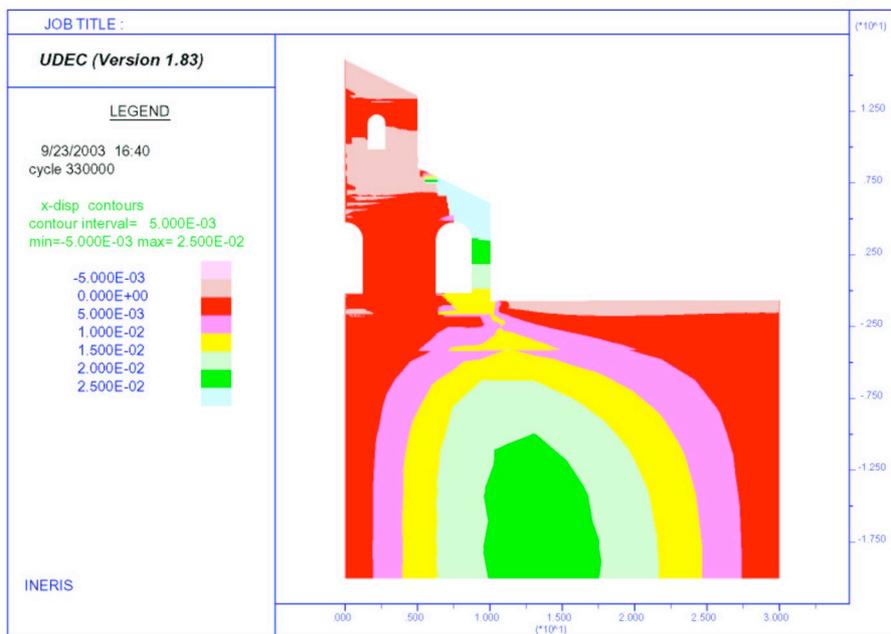


Figure 31 : Déplacement horizontal sur le modèle 1

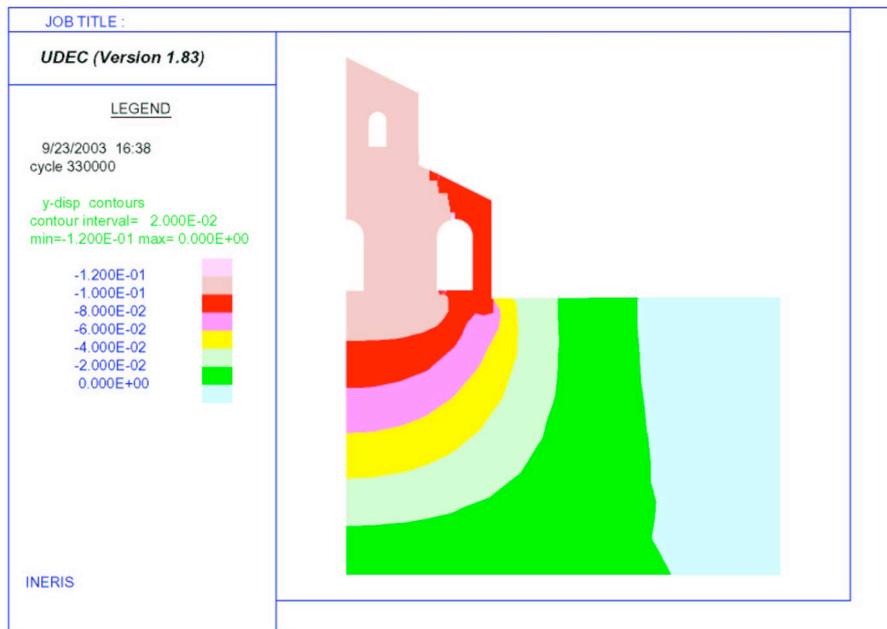


Figure 32 : Tassement sur le modèle 1

Le tassement différentiel que subit l'édifice est de l'ordre seulement de 2 cm mais c'est suffisant pour le faire se disloquer.

1.4 Conclusion

Si on considère cet événement ne s'est pas produit car on en n'a pas la trace dans la fondation de ce mur, on peut imaginer deux hypothèses « d'erreur » dans le modèle :

- Le mortier utilisé était en réalité plus résistant
- La géométrie était différente, les portes latérales étaient en réalité plus petites

2. Hypothèse 1 : La résistance du mortier a été sous-estimée

Pour tester cette hypothèse, on multiplie par 10 la cohésion et la résistance en traction qui passent respectivement à 2 et 1 MPa, ce qui correspond aux mortiers de la meilleure qualité présents à cette époque. Le modèle correspondant sera appelé 1bis.

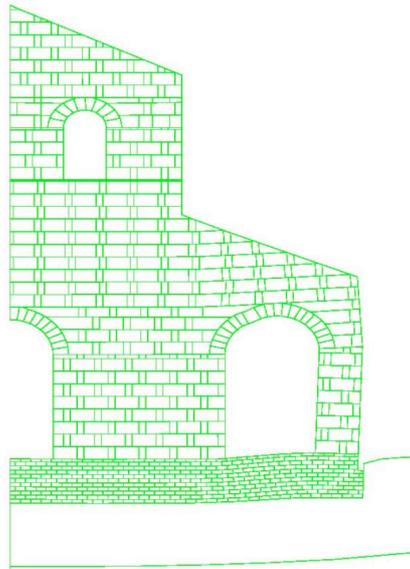


Figure 33 : La déformation des blocs du modèle 1bis amplifiée par un facteur 10

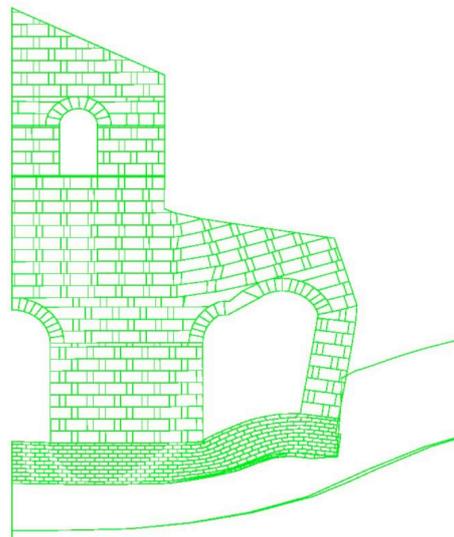


Figure 34 : La déformation des blocs du modèle 1bis amplifiée par un facteur 50

Il n'y a plus de dislocation des blocs, mais l'édifice subit toujours un tassement différentiel de l'ordre de 2 cm :

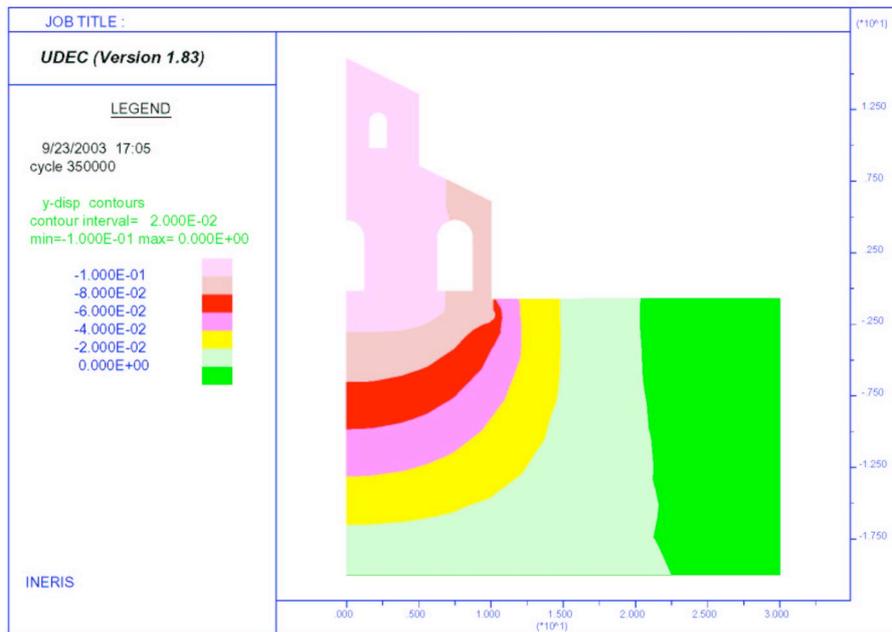


Figure 35 : Tassement sur le modèle 1bis

Cette hypothèse ne semble donc pas valide compte tenu que l'on ne remarque pas ce tassement sur les plans, mais cela reste à confirmer sur le terrain.

3. Hypothèse 2 : la restitution architecturale n'est pas exacte

La reconstitution de l'édifice doit donc être revue par les archéologues. Une nouvelle proposition est donc soumise au calcul : la porte principale garde à peu près les mêmes dimensions mais les portails latéraux sont plus petites.

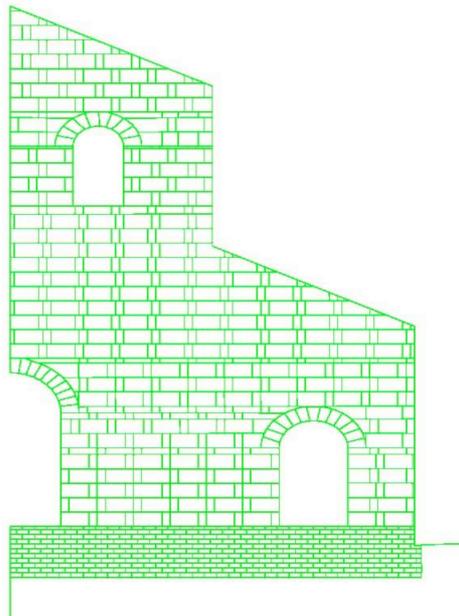


Figure 36 : Le modèle 2, zoom sur le bâtiment

Le calcul permet alors de déterminer qu'il n'y a plus de tassement différentiel important et que le bâtiment prend position dans le sable d'une manière homogène.

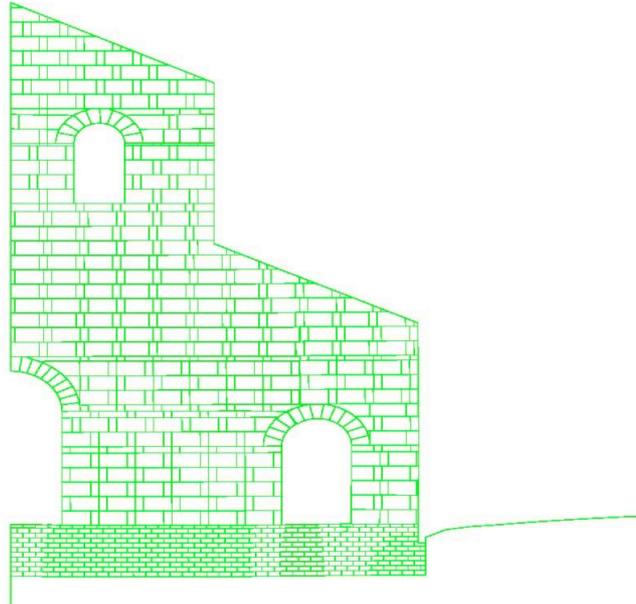


Figure 37 : La déformation des blocs du modèle 2 amplifiée par un facteur 10

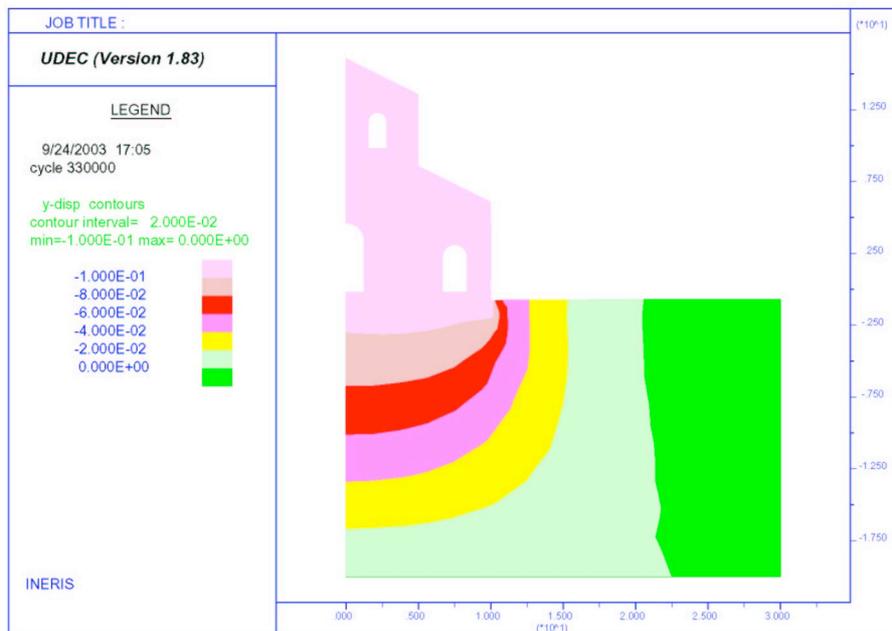


Figure 38 : Tassement sur le modèle 2

En effet, la présence d'une surface plus importante de mur plein dans les parties latérales non seulement les alourdit et donc les rapproche, en ce qui concerne la contrainte verticale, de la partie centrale, mais surtout permet de rigidifier la structure qui se déplace d'un seul bloc.

4. Comparaison des 3 modèles

4.1 Etude de la plasticité

Il est intéressant de comparer la manière dont se comporte le sable dans les trois situations examinées :

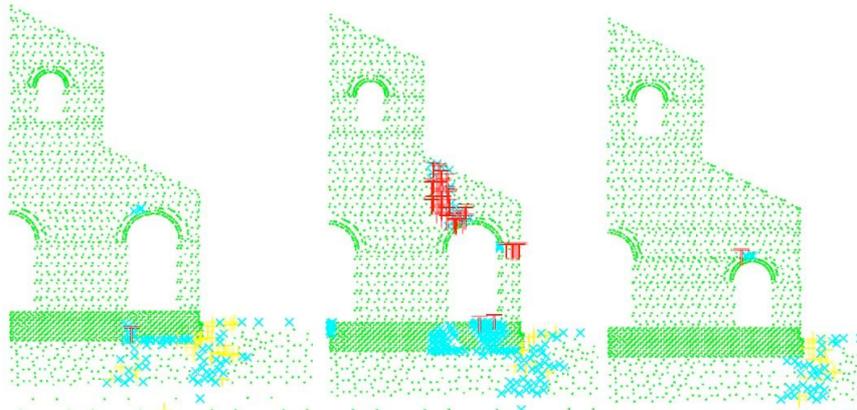


Figure 39 : Les points plastiques des modèles 1, 1bis et 2

Cette figure montre que dans le premier modèle, le sable plastifie non seulement à l'angle du bâtiment montrant que celui-ci poinçonne dans la dune, mais aussi sous la semelle de la partie latérale, qui d'après la figure XXX s'est déjà disloquée. Dans le modèle 1bis, la partie latérale ne s'est pas tout à fait disloquée d'après la figure XXY mais on s'aperçoit ici que l'on est proche de la rupture dans le mur et dans la semelle. Dans le modèle 2, rien n'indique que le bâtiment va se disloquer, il poinçonne seulement dans le sable comme le faisait le stylobate dans le paragraphe précédent.

4.2 Comparaison des contraintes verticales à la contrainte limite de service

On peut comparer la contrainte verticale à la base de la semelle dans ces trois modèles :

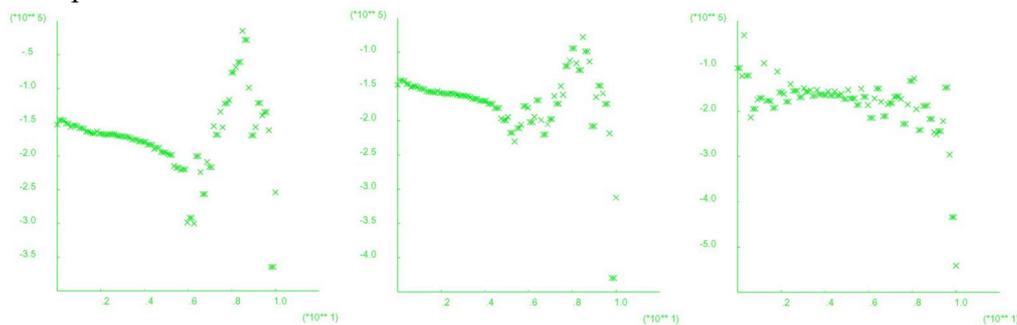


Figure 40 : Contrainte verticale à la base de la fondation pour les modèles 1, 1bis et 2

Les 2 premières courbes sont à la même échelle, celle de gauche est décalée d'une graduation vers le bas par rapport aux autres. La courbe de droite est à une échelle légèrement plus grande. Attention, les compressions sont comptées négativement.

Globalement, sous la partie centrale pour les 2 premières courbes, la contrainte augmente linéairement vers les parties latérales entre 150 kPa et 200 kPa. Il y a ensuite une discontinuité à cause de la rupture qui a eu lieu à gauche et qui est très proche à droite. Pour le modèle 2, si les valeurs de contrainte sont du même ordre de grandeur, l'allure de la courbe est différente. La contrainte présente un minimum à la limite entre la nef centrale et la nef latérale mais reste

aux alentours de 200 kPa. Dans les 3 cas, le poinçonnement du bâtiment fait fortement augmenter la contrainte à l'extrémité du bâtiment.

En effet, la moyenne de ces trois courbes est du même ordre de grandeur (environ 170 kPa) mais elle sensiblement plus importante que pour le stylobate sud, avec des valeurs extrêmes plus fortes, jusqu'à 250 kPa (en ne gardant que les valeurs significatives, i.e. qui sont atteintes durablement) pour le modèle 2, le plus probable.

On peut calculer un coefficient de sécurité comme pour le stylobate. Là encore, il faut corriger la valeur trouvée car la semelle est plus large à sa base que le mur. La contrainte est en réalité plus faible d'un coefficient multiplicatif égal au rapport de la largeur du mur et de la largeur de la fondation à sa base, si on considère que la contrainte se répartit parfaitement. Donc la

valeur maximale de contrainte verticale est : $q_m = 250 \times \frac{0.85}{1.2} \approx 175$ kPa. C'est-à-dire que l'on

dépasse la contrainte limite de service que l'on a calculé précédemment, le coefficient de sécurité est alors de $\frac{150}{175} \approx 0.9$.

Comme pressenti par les archéologues, on se situe donc à la limite de service, sans marge de sécurité.

III. Conclusion

En résumé, ces résultats signifient que la construction d'un tel bâtiment sur ce terrain a été sans doute possible mais il n'a assuré que très peu de marge de sécurité aux hétérogénéités du terrain et des matériaux de construction ainsi qu'aux aléas climatique et sismique.

Si le stylobate semble avoir été correctement dimensionné avec un coefficient de sécurité de 1.4 seulement, c'est grâce aux ouvertures qui ont été pratiquées dans sa longueur. La façade, quant à elle, n'offre même pas de coefficient supérieur à 1 (0.9). D'autres parties de l'église ont pu aussi dépasser la limite de service que l'on a fixée, il faudra par exemple étudier la crypte Est, qui est sans doute la plus grande de toute la Palestine pour cette période. Elle présente des épaisseurs de mur de plus de 4 m mais les archéologues s'interrogent sur ce qui se situait au-dessus. Il pourrait s'agir d'une abside simple, d'une coupole... Tester ces différentes hypothèses par le calcul est indispensable mais le modèle choisi devra être en 3 dimensions inmanquablement, il devra faire l'objet d'une étude séparée.

Ce qui est certain, c'est qu'une telle situation a entraîné un tassement différentiel de la structure qui était alors fragile dès sa construction et dont une petite modification de l'environnement telle que de fortes pluies ou un séisme aurait suffi à faire s'effondrer.



Photo 3 : Un mur restauré après un épisode pluvieux

Le modèle de la façade, au-delà de ses conséquences pour l'architecture, nous montre également qu'une différence de tassement de 2 cm seulement suffit à disloquer la structure en maçonnerie. On s'en souviendra pour la suite.

Aucun ingénieur n'oserait construire un tel bâtiment avec des fondations superficielles légères à cet endroit de nos jours et le fait que l'église de Umm Amr ne soit plus là aujourd'hui leur donne raison en un certain sens. Ainsi, la construction d'un musée qui est envisagée devra, soit être beaucoup plus légère, soit comprendre des fondations profondes ce qui paraît peu envisageable sur un site archéologique. De la même manière, d'éventuelles restitutions d'éléments architecturaux devront être réalisées avec prudence.

Ce qui est attesté par les archéologues c'est que la partie Est des différents états du bâtiment a été l'objet de glissements de terrain. Plus généralement, il faut vérifier la stabilité en glissement de la dune surchargée par le bâtiment.

3^{ème} partie :

Détermination de la stabilité du bâtiment dans son environnement dunaire

Il est indispensable de déterminer si le fait que le bâtiment se situe sur le flanc d'une dune a eu un impact sur sa stabilité. Pour le savoir, il a été choisi de poursuivre la coupe du stylobate en représentant la pente de la dune à l'Est et à l'Ouest. Ce modèle ne rend pas parfaitement compte de la situation car il tente de représenter en 2D un problème qui est tridimensionnel compte tenu de la forme supposée de l'église. Compte tenu du temps et du matériel à ma disposition, c'était le seul réalisable. Il permettra de donner seulement une idée d'ensemble. Les résultats quantitatifs n'auront valeur que d'ordre de grandeur.

Le calcul sera effectué en deux temps. En effet, la dernière église du site présente une crypte remarquable, mais, d'après les archéologues, elle n'a été ajoutée que dans un deuxième temps. Nous verrons d'abord, l'église dans son environnement avant la construction de cette crypte puis dotée de ce bâtiment supplémentaire.

I. Première situation historique supposée

1. Le modèle

Pour réintroduire le stylobate dans son environnement, il faut donc agrandir le modèle à gauche et à droite. On représente donc la partie Est de la dune dans une coupe ouest/est (opposée à la coupe est/ouest utilisée précédemment) avec sa pente prise constante de son sommet à gauche à la route à droite. L'église se situe vers le milieu de la pente sur un replat. Le substratum rocheux (kurkar) affleure un peu au-dessus du niveau de la mer une vingtaine de mètres plus bas que le site avec un pendage nul, il sera donc représenté par un bloc de 5 m d'épaisseur situé 20 m en dessous du bâtiment. Il est à noter qu'on aurait pu ne pas le représenter et considérer que les déformations ne l'affecte pas mais son module d'Young est relativement faible pour un grès, il est donc potentiellement déformable. Mais surtout, si on ne représente pas ce substratum, le sable de la partie gauche a le mauvais goût de plastifier immédiatement sans qu'aucune astuce n'ait permis de l'en empêcher.

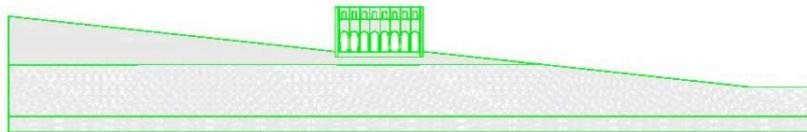


Figure 41 : Le modèle 1 et son maillage

En ce qui concerne le bâtiment en lui-même, comme le modèle 2D ne permet pas de représenter l'abside, seul un mur comme à gauche termine le bâtiment. Pour rester dans des temps de calcul raisonnables, il faut simplifier le modèle en se séparant de la maçonnerie dans la fondation qui nous avait permis d'étudier précisément la répartition des contraintes dans celle-ci.

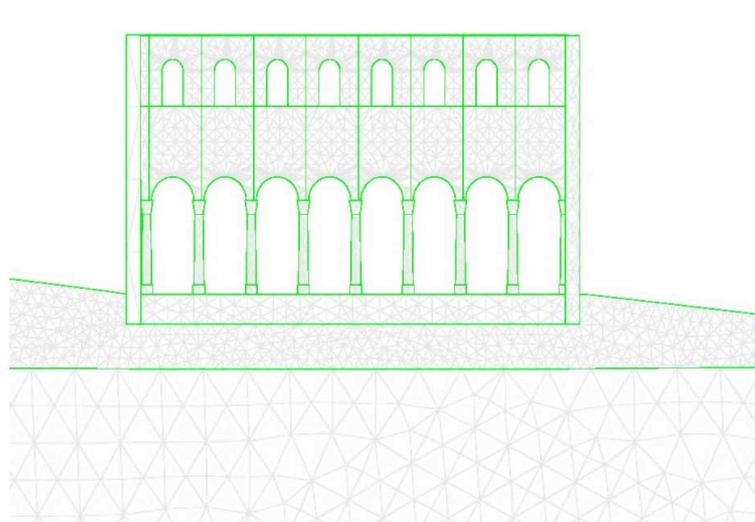


Figure 42 : Le modèle 1 et son maillage, zoom sur le bâtiment

Les conditions aux limites consistent en un blocage latéral et inférieur : le haut de la dune à gauche est immobile à l'échelle de temps qui nous intéresse et nous pouvons dire qu'elle n'a plus d'influence à droite.

2. Les résultats

On observe qu'aucun paramètre n'indique qu'un glissement de terrain était à craindre. En fait, on voit plutôt que le bâtiment a tendance à poinçonner dans la dune. On le voit à l'aide du résultat en tassement :

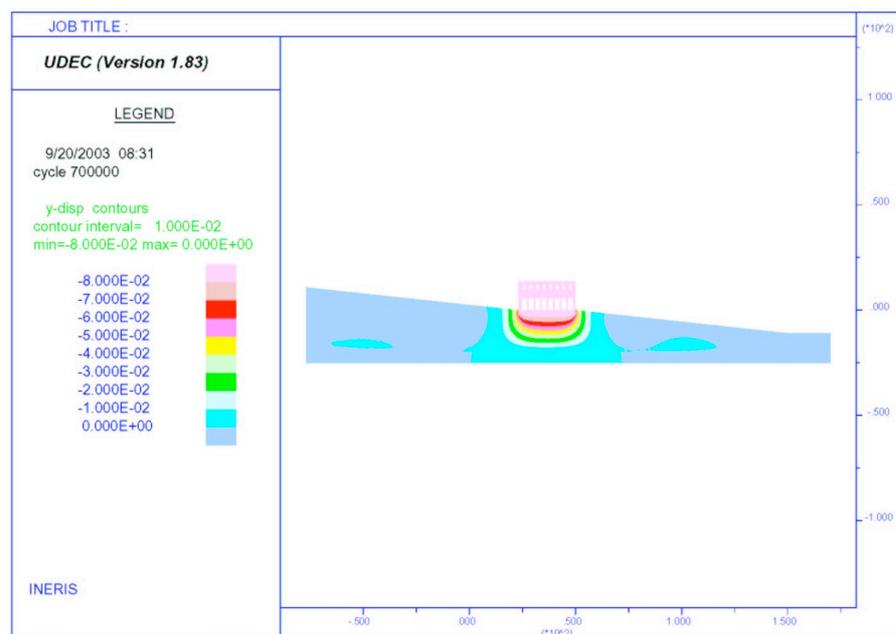


Figure 43 : Tassement du modèle 1

Le tassement mesuré à la base de la fondation présente un maximum à peu près au centre du bâtiment. C'est donc à cet endroit que le risque de dislocation est le plus fort comme une poutre posée sur 2 appuis que l'on charge.

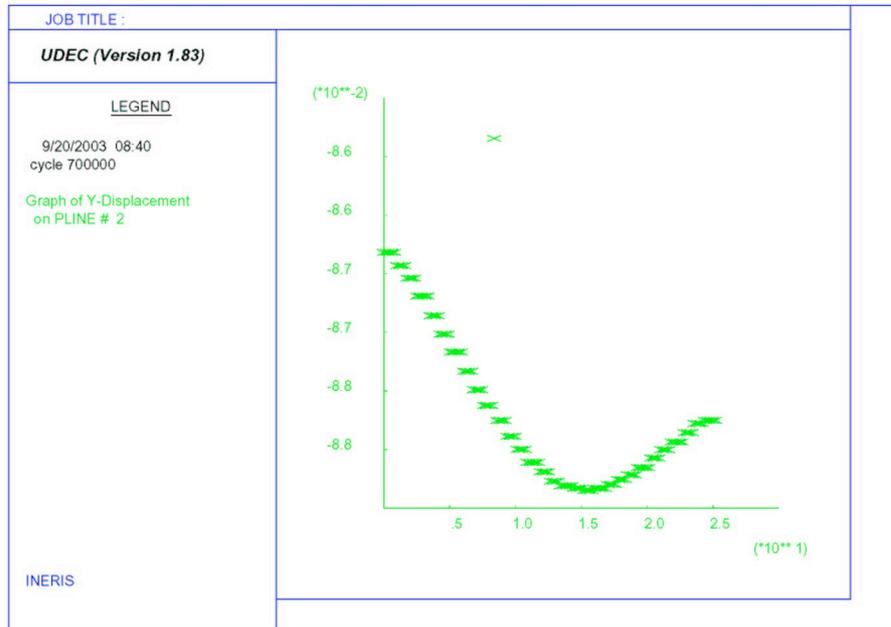


Figure 44 : Modèle 1, tassement à la base de la fondation du bâtiment

On peut également observer l'enfoncement du bâtiment grâce aux points plastiques qui délimitent un « entonnoir » :

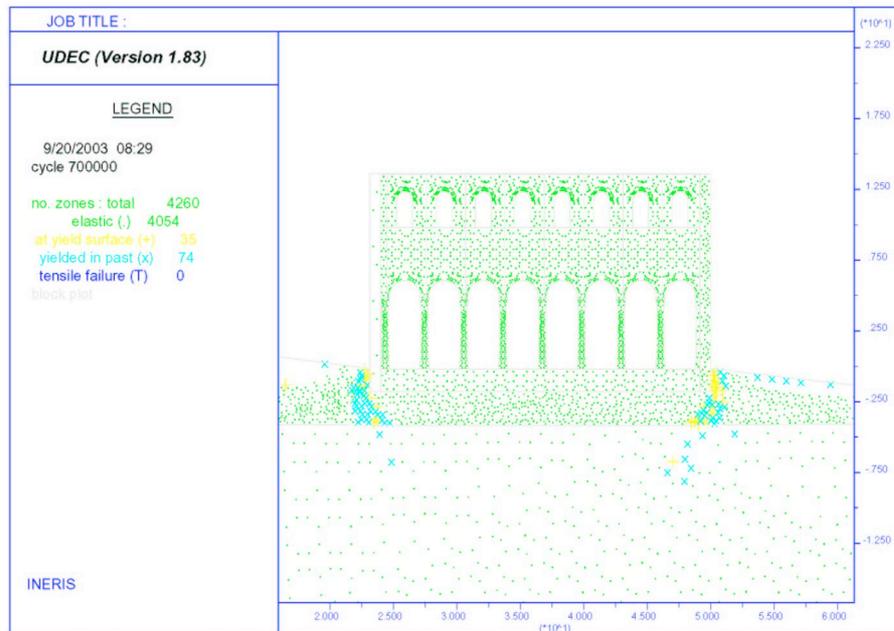


Figure 45 : Modèle 1, points plastiques

Le déplacement horizontal ne présente pas de mouvement général vers le bas de la dune mais montre que la dune « s'ouvre » sous le poids du bâtiment :

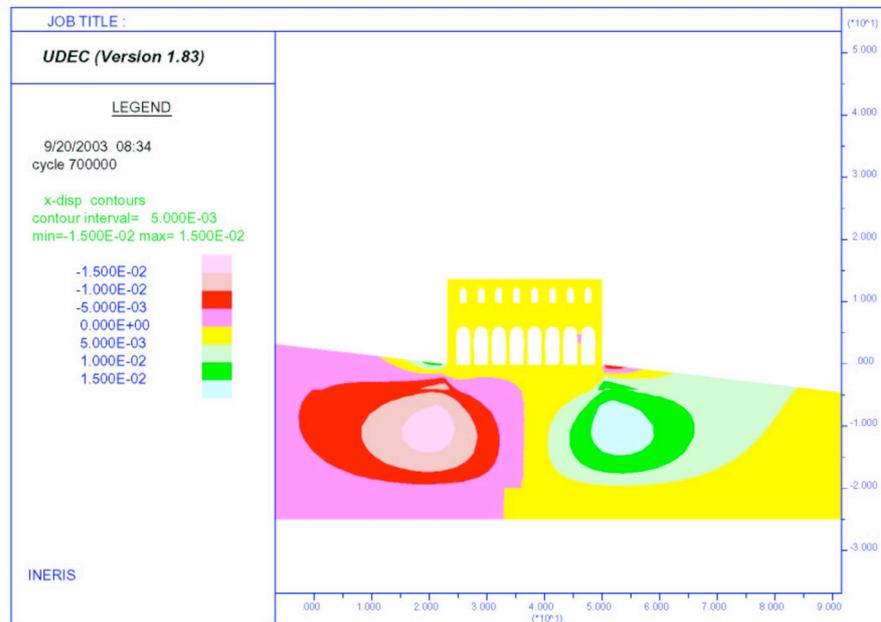


Figure 46 : Modèle 1, déplacement horizontal

La courbe de la contrainte verticale à la base de la fondation corrobore la flexion du bâtiment. La valeur de 150 kPa à peu près maintenue au milieu de la courbe est à rapprocher du résultat précédent mais comme on a supprimé la maçonnerie, on n'observe plus les oscillations dues aux colonnes.

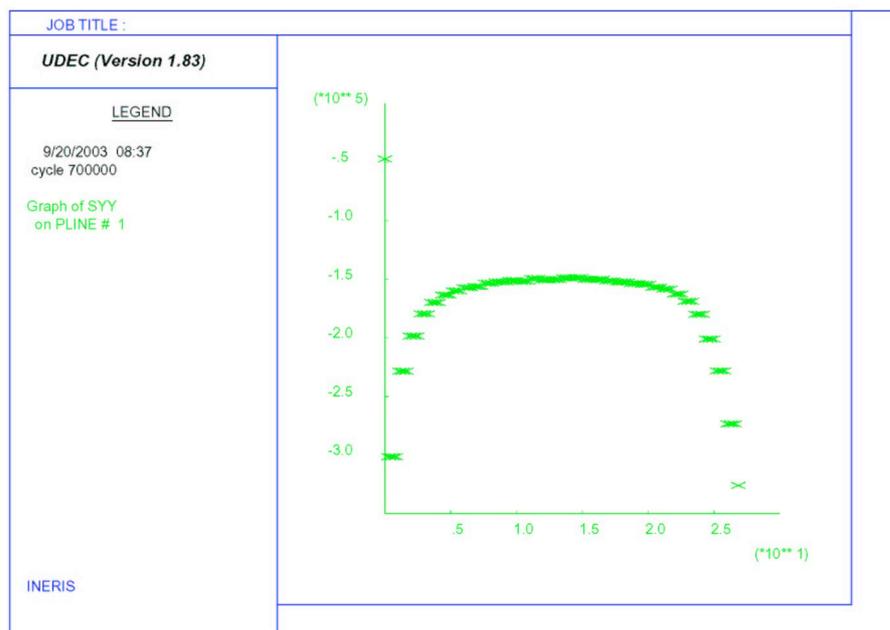


Figure 47 : Modèle 1, contrainte verticale à la base de la fondation

II. Après la construction de la crypte

1. Le modèle

On ajoute simplement à la géométrie précédente une représentation en coupe de la crypte. Malheureusement, cette crypte est un objet tridimensionnel ne possédant pas de symétrie dans le sens de la coupe. On ne représente ainsi que la portion pleine du mur de la crypte et pas l'espace qu'elle renferme. Les résultats seront donc forcément énormément biaisés, mais dans l'attente d'une étude 3D de la crypte en elle-même, c'est tout ce qui peut être présenté.



Photo 4 : La crypte vue du ciel, un objet 3D par excellence

Il aurait pu être intéressant pour réaliser ce calcul de poursuivre le précédent en le faisant de manière à simuler la construction de cette crypte. Malheureusement cette idée n'est venue que tardivement et les deux calculs avaient déjà été menés au bout.

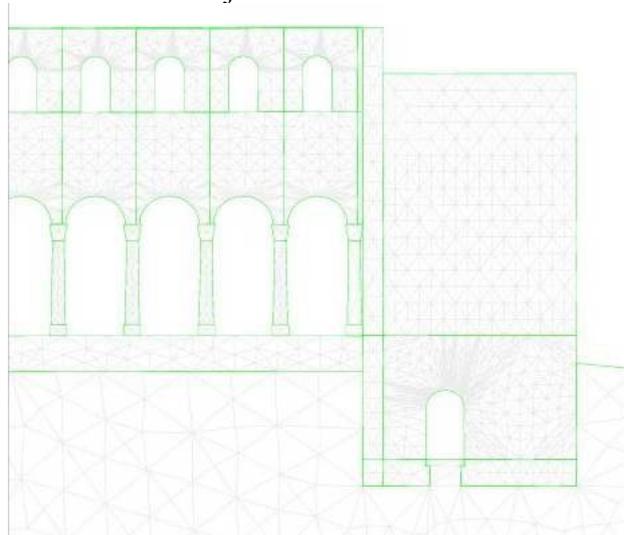


Figure 48 : Le modèle 2 et son maillage

2. Les résultats

L'ajout de la crypte ne modifie pas sensiblement le comportement du bâtiment. Comme on pouvait s'y attendre, le sable à l'extrémité droite de la crypte plastifie mais cela n'introduit pas de tassement supplémentaire par rapport au modèle précédent.

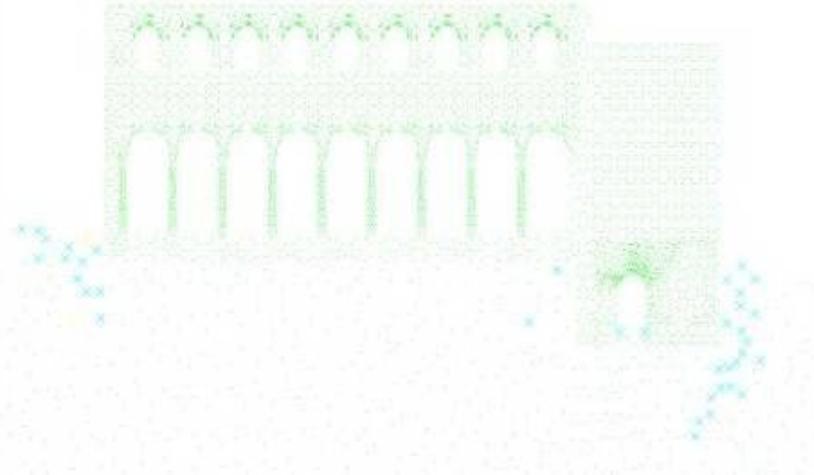


Figure 49 : Modèle 2, points plastiques

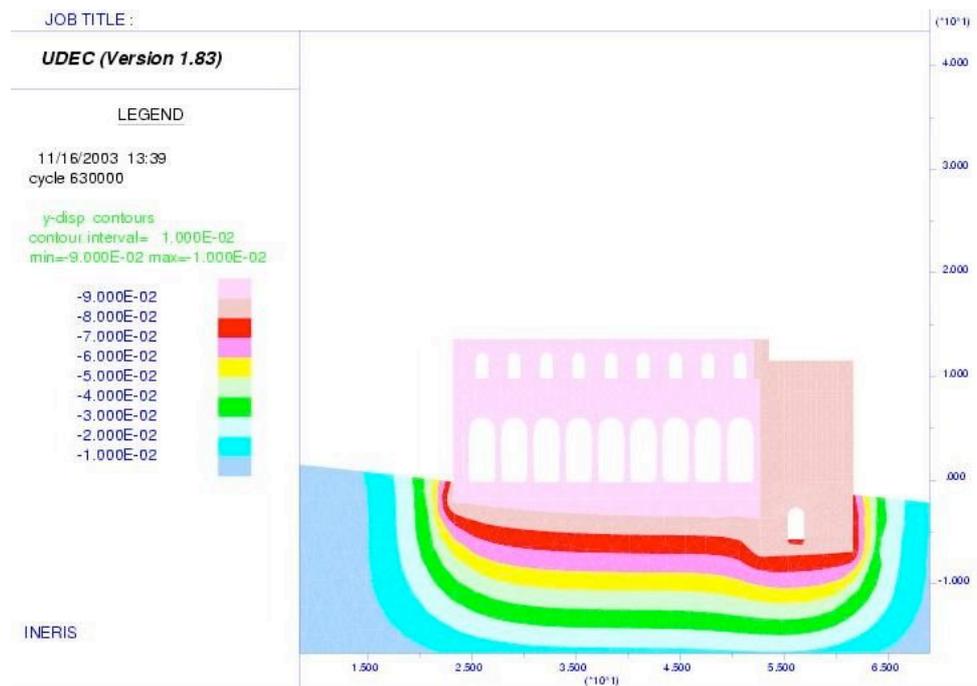


Figure 50 : Tassement du modèle 2

Le modèle de la façade a montré qu'une différence de tassement de 2 cm suffisait à disloquer la structure en maçonnerie. Cette image du tassement de la crypte peut donc nous faire penser que le tassement différentiel qui l'affecte peut aller jusqu'à en disloquer la structure. C'est la principale information que l'on tirera de ce modèle. Il faut cependant rappeler que cette coupe n'est pas représentative de l'objet 3D qu'est la crypte. Celle-ci aurait tendance à être en moyenne plus légère que ce que la coupe représente. On en déduit qu'elle devrait s'enfoncer encore moins et donc augmenter le phénomène de tassement différentiel.

III. Conclusion

En conclusion de cette partie consacrée à la stabilité d'ensemble du bâtiment et de la dune, on peut dire que la faible pente de cette dernière ne laissait pas craindre de mouvement de terrain de grande ampleur. Localement, il est toujours possible que des remblais aient glissé mais sans mettre en péril le bâtiment. Ces deux modèles confirment la prédominance du tassement dans les mouvements affectant l'église. Ainsi, selon eux, ils atteignent 8 à 9 cm pour tout le bâtiment. Il est ainsi possible que la crypte subisse un tassement légèrement plus faible que le reste du bâtiment. Cela est valable intrinsèquement comme le montre le modèle 2 mais aussi dynamiquement si on considère qu'elle a été construite après le reste du bâtiment. La vitesse de tassement n'étant pas linéaire, la crypte aurait ainsi sans doute continué à s'enfoncer alors que l'église avait atteint sa position d'équilibre. Un calcul unique réunissant les deux modèles et utilisant le phasage pour montrer l'édification de la crypte aurait pu le prouver.

Conclusion générale

De nombreuses questions avaient été posées par les archéologues en ce qui concerne la stabilité potentielle de l'église dont ils ont découvert les ruines. Toutes n'ont pas pu être traitées, celle qui l'ont été n'ont trouvé que des réponses partielles... Ce qui est certain, c'est que ce bâtiment a subi des tassements de l'ordre de la dizaine de centimètres ce qui est beaucoup en absolu mais ce qui implique surtout que des hétérogénéités de matériaux ou de sols ont pu engendrer des tassements différentiels importants ; Suffisamment important pour disloquer des structures dans le temps. En effet, le tassement n'est pas instantané et donc ses hétérogénéités non plus. La zone la plus exposée à ce type de phénomène est sans conteste la crypte, et cela d'autant plus si sa construction a été postérieure au reste du bâtiment.

L'autre fait avéré, c'est qu'en condition sèche (la seule testée...) le risque de mouvement de terrain lié à la surcharge due au bâtiment sur la dune n'est pas à prendre en compte.

La modélisation assez précise de la façade a permis de corriger un point de détail architectural, montrant que son apport pouvait être pertinent.

En revanche, les quantifications des contraintes et la comparaison avec une limite de service, ne me semblent pas avoir réellement abouti à des résultats dignes de confiance. Tout ce que l'on peut affirmer, c'est que l'église a été construite avec un coefficient de sécurité faible (je me garderai bien de citer un chiffre). Cela signifie qu'une modification de son environnement a pu suffire à la faire se disloquer et donc s'effondrer. Comme modification de l'environnement, on pense surtout à des pluies torrentielles ou à une secousse sismique.

Ce qui pourrait être intéressant pour la poursuite de cette étude serait ainsi de tester l'hypothèse de la secousse sismique, ce qui peut facilement être réalisé avec UDEC. En dehors de cela, pour aller plus loin dans la compréhension du bâtiment, il faudrait passer à la modélisation 3D, beaucoup plus coûteuse en temps de calcul. Il faudrait donc se concentrer sur la zone la plus pertinente c'est à dire la crypte. Si quelqu'un souhaitait reprendre les différents modèles que j'ai utilisés, sont à sa disposition les lignes de codes et un fichier recensant quelques astuces pour l'utilisation de UDEC ainsi qu'une bibliographie pour rechercher les événements sismiques de l'époque.

Bibliographie

Alber, Hauptfleisch, « Generation and visualization of micro fractures in Carrara marble for estimating fracture toughness, fracture shear and fracture normal stiffness », *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 36 (1999) 1065-1071

Bonnin, Cara, Cisternas, Fantechi Editors, “Seismic Hazard in Mediterranean Regions”, p. 279

Bowles, Joseph E., « Foundation analysis and design », International Student Edition McGraw-Hill Kogakaska, Tokyo, 1977

« Bulletin de l’institut français d’archéologie orientale » tome 96 « Monolithisme et élasticité dans la construction égyptienne », Le Caire 1996, p.453

Department of Engineering University of Cambridge, “Masonry Construction”, réimprimé de “Meccanica”, Vol. 27 n°3 (1992)

Di Stefano, Roberto, “The use of modern structures in monument restoration”; ICOMOS Information, juillet-septembre n°3/1985

« Ethique de la restauration », Congrès International sur la conservation de la Pierre et autres Matériaux, UNESCO, Paris 29/06/1993-01/07/1993, p. 113

Fèvre, Paul, « Pierres de construction », Techniques de l’Ingénieur, C 901.

Filliat, Georges, « La pratique des Sols et Fondations », Editions du Moniteur, Paris 1980

GRECO Géomatériaux, “Bilan et Perspectives”

Mamillon, Marc, « Rôle de la structure », Congrès International sur la conservation de la Pierre et autres Matériaux, UNESCO, Paris 29/06/1993-01/07/1993, p.46

MERRIEN, AMITRANO, PIGUET, « Eléments de géotechnique », Ecole des Mines de Nancy, 2002/2003

Musée des Monuments Français, « Les remontées d’eau du sol dans les maçonneries, diagnostic, expérience de contrôle, mise en œuvre », Paris 25/001/1994

Lama, R.D., Vutukuri, V.S., “Handbook on Mechanical Properties of Rocks”, Trans Tech Publications, Vol. I, II, III et IV, 1978

Tassios, T.P., “Structural behaviour repair and strengthening”, Congrès International sur la conservation de la Pierre et autres Matériaux, UNESCO, Paris 29/06/1993-01/07/1993, p. 40

“The Engineering Geology of Ancient Works Monument and Historical Sites, Preservation and Protection”, Vol. 4, Athènes, 1990

Technique de l’ingénieur Volume C « Construction » parties C2 et C3
C 216-23 caractéristiques de sables en cisaillement
C3 :C2150 « Restauration des bâtiments en pierre »

Thonier, Henri, « Conception et calcul des structures de bâtiments », Presses de l’ENPC, Paris, 1992, 6 volumes

Verdel Thierry, « Géotechnique et Monuments Historiques, Méthodes de modélisation appliquée à des cas égyptiens », Nancy, 1993

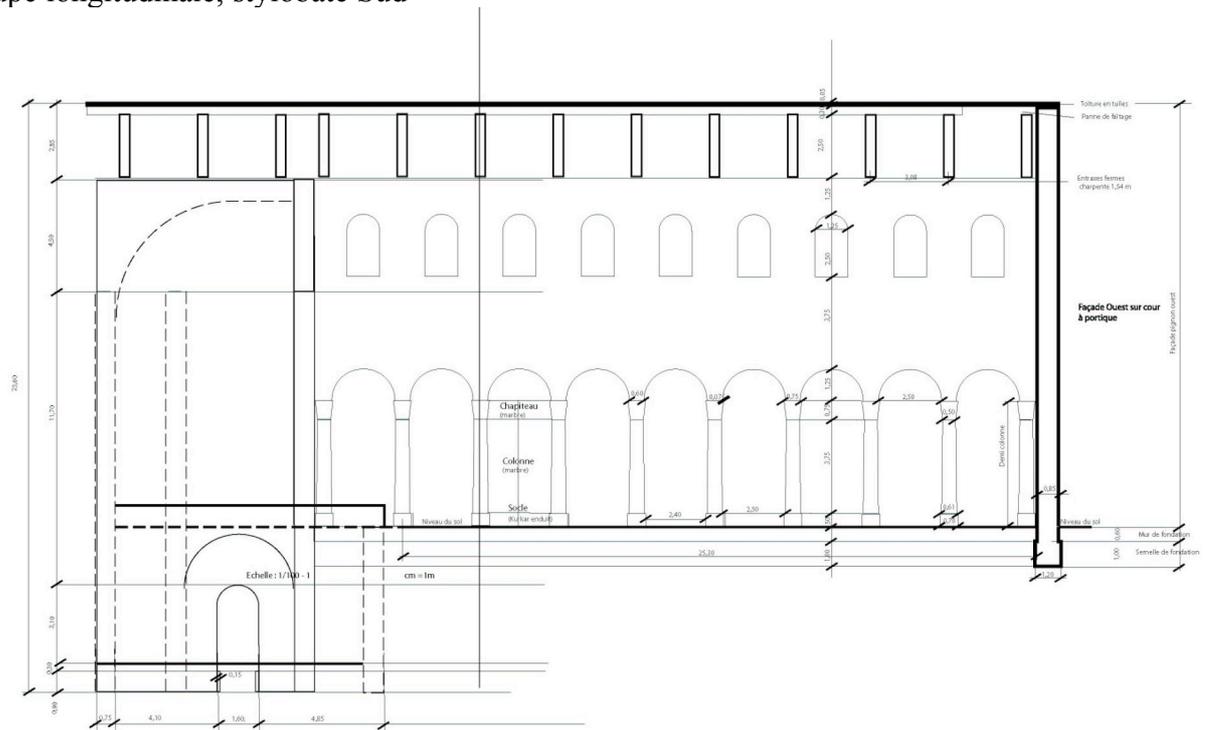
Pour des propriétés de roches : <http://www.hbcumi.cau.edu/tqp/301/301-08/Arenaceous%20Sedimentary%20Rocks.html>

Pour la sismicité : <http://www.liv.ac.uk/seismic/links/info.html>

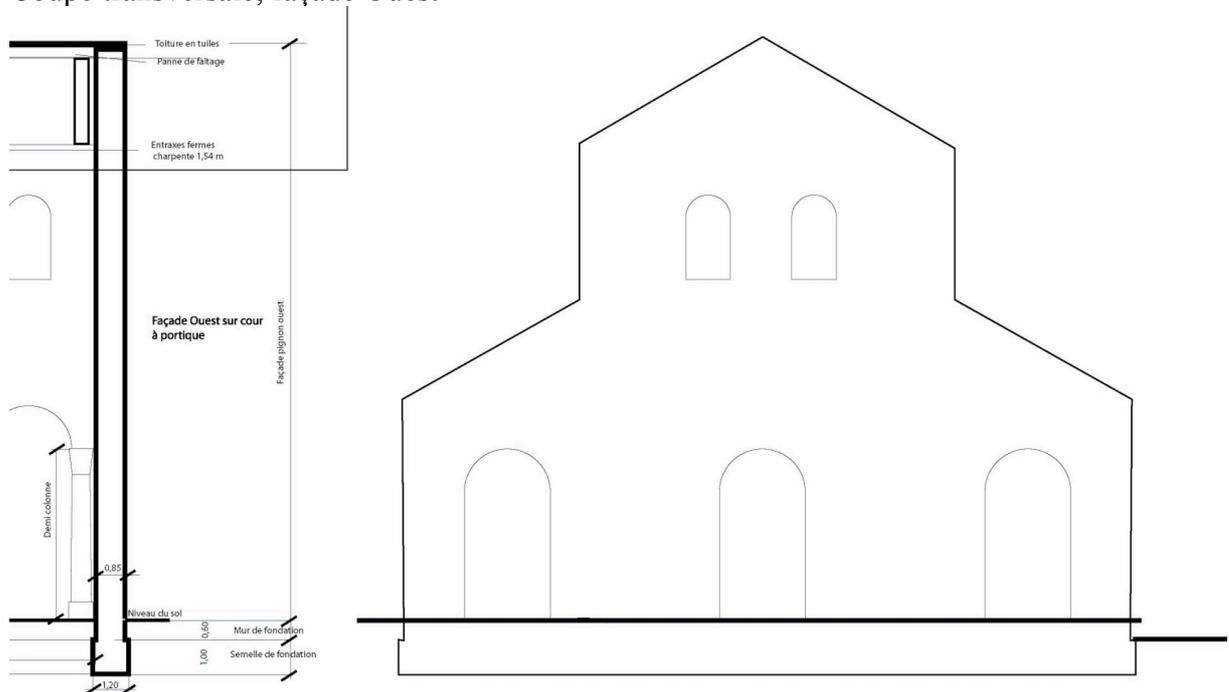
ANNEXES

Annexe 1 : Coupes architecturales du bâtiment

Coupe longitudinale, stylobate Sud



Coupe transversale, façade Ouest

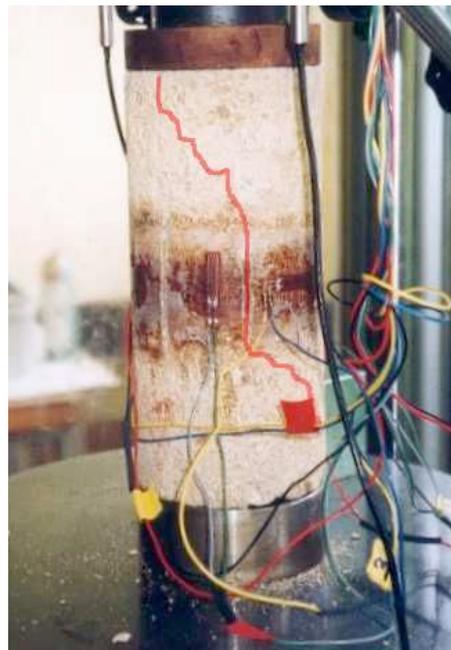


Annexe 2 : Essai de laboratoire au LAEGO

Lors de la campagne 2002, le géologue Jean-Michel Mechling, chargé de l'étude des matériaux du site, a prélevé différentes carottes, en particulier de kurkar, le grès marin local. Il a réalisé des essais de résistance à la compression et de vitesse du son mais ne disposait pas de jauges lui permettant de réaliser des mesures en déplacement lors de ses essais. Le LAEGO a autorisé de réaliser cet essai dans ses locaux, permettant ainsi de déterminer une loi de comportement pour cette roche. L'échantillon choisi était le plus isotrope possible, alors qu'en réalité, les blocs présentent de fortes anisotropies (strates).



Le dispositif expérimental



*A la rupture
(La fracture est repassée en rouge)*